Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 5 (19 Novembre 2010)

Affinità e teorema spettrale

1. Sia f un'affinità di $\mathbb{A}$. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in \mathbb{A}$ allora f fissa tutti i punti della retta r passante per P e Q.

2. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento Oe_1e_2.

   (a) Determinare l'equazione di ogni affinità (f, φ) di $\mathbb{A}$ che fissi i punti della retta r di equazione $3x = y + 1$.

   (b) Tra le affinità considerate in (a) si determinino quelle (eventuali) tali che $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$.

   (c) Tra le affinità considerate in (a) si determinino le eventuali traslazioni.

3. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$.
   Siano ρ la riflessione di asse la retta $r : x - 2y = 1$ e σ la rotazione di centro $P_0 = (1, 2)$ e angolo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

   (a) Scrivere le equazioni di ρ e σ.

   (b) Determinare le equazioni delle isometrie f e g tali che $f \circ \rho = \sigma$ e $\rho = g \circ \sigma$ e indicare di che tipo di isometrie si tratta.

4. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ uno spazio affine con riferimento $Oe_1e_2e_3$. Mostrare che una trasformazione affine di $\mathbb{A}$ "manda rette in rette".

5. (*Simmetria rispetto a un punto*)
   Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$). Fissiamo in $\mathbb{A}$ un punto C.
   Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ il punto simmetrico di P rispetto a C, cioè il punto $f(P)$ che soddisfa l'identità vettoriale:
   $$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$$

6. Classificare le isometrie di una retta euclidea.

7. Siano $f = R_{0,\alpha}$ e $g = R_{0,\beta}$ le rotazioni di $\mathbb{E}^2$ di centro $O = (0, 0)$ ed angolo rispettivamente α e β.
   Dimostrare che $f \circ g$ è una rotazione di centro O e angolo $\alpha + \beta$.

8. Siano r e s due rette incidenti di $A = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e siano ρ_r e ρ_s le riflessioni di assi rispettivamente la retta r e la retta s.

   (a) Mostrare che la composizione $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro $P_0 = s \cap r$.

   (b) Che relazione c'è tra $\rho_s \circ \rho_r$ e $\rho_r \circ \rho_s$?

   (c) Se r è parallela ad s che tipo di affinità è $\rho_r \circ \rho_s$?

9. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto a una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:
   (a) T è autoaggiunto.
   (b) T è unitario.

10. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo e sia $T : V \to V$ un operatore autoaggiunto.
   (a) Mostrare che $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ volte}}$ è autoaggiunto $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
   (b) Mostrare che se esistono $n \in \mathbb{N}$ e $\overrightarrow{v} \in V$ tali che $T^n(\overrightarrow{v}) = 0$ allora $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}T$.

11. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare così definito:

$$\varphi(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \qquad \varphi(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}, \qquad \varphi(\overrightarrow{k}) = 2\overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}, \qquad \varphi(\overrightarrow{l}) = -\overrightarrow{k} + 2\overrightarrow{l},$$

dove $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Verificare che φ è un operatore simmetrico e determinare una base ortonormale di autovettori di φ.