Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 3 (21 Ottobre 2010)

Prodotti scalari e ortonormalizzazione

1. In ciascuno dei seguenti casi determinare una base ortonormale, rispetto al prodotto scalare standard, del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori assegnati:

   (a) $(1,0,0,1), (0,1,2,3), (1,-1,1,-1)$

   (b) $(-1,0,1,2), (2,0,1,-4), (0,0,3,0), (-3,0,0,6)$

   (c) $\{(1,n,n^2,n^3) \mid n \in \mathbb{N}\}$

2. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ la forma bilineare b così definita:

   $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_3+2x_4y_4, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4.$

   (a) Verificare che b è un prodotto scalare.

   (b) Trovare una base ortogonale e una base ortonormale per b.

   (c) Trovare una base ortonormale del sottospazio $V = \{(x,y,z,w)|2x+y-z-w=0\}$ di $\mathbb{R}^4$. Completare poi la base trovata a base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.

3. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia b un prodotto scalare su V. Sia W un sottospazio vettoriale di dimensione finita di V. Dimostrare che vale:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

4. (a) Dimostrare che in uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle\, , \rangle)$ sussistono le seguenti identità, $\forall\, v, w \in V$:

      i. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$

      ii. $\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 = 4\langle v, w\rangle$.

   (b) Sia V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare standard e siano v, $w \in V$.
   Dimostrare che se $\|v\| = \|w\|$ allora $(v+w)\perp(v-w)$. Interpretare questo risultato geometricamente.

5. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado 3 a coefficienti in $\mathbb{R}$, dotato del prodotto scalare standard:

$$\left\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \right\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

   (a) Dopo aver verificato che i seguenti polinomi costituiscono una base di V, applicare ad essi il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt:
   $$t+1,\ t+t^2,\ 2-t-t^3,\ t^3$$

   (b) Dato il sottospazio $U = \left\langle t^3 - 1, t + 2 \right\rangle$ di V calcolare le equazioni cartesiane e parametriche di $U^\perp$. Scrivere poi una base ortonormale di U e di $U^\perp$.

6. Sia $\mathcal{C}[0,1]$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su $[0,1]$ e sia $\mathbb{R}_n[x]$ il sottospazio di $\mathcal{C}[0,1]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a n.

   (a) Date $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ mostrare che $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ è un prodotto scalare.

   (b) Determinare una base ortogonale di $\mathbb{R}_3[x]$ rispetto al prodotto scalare definito per restrizione da $\langle , \rangle$.

7. Sia $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 1)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$, dotato di prodotto scalare standard. Determinare i vettori ortogonali ad $\overrightarrow{u}$, aventi norma 2 e verificanti una delle due condizioni:

   (a) sono complanari con $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, -1)$;

   (b) formano un angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ con $\overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 0)$.