Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

TUTORATO 2 (7 OTTOBRE 2010)
FORME BILINEARI E DIAGONALIZZAZIONE

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Diagonalizzare le forme bilineari associate alle seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $F : V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica. Siano $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che $F(v_i, v_j) = 0, \forall\, i \neq j$. Sotto quali condizioni possiamo concludere che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti?

3. Sia V un K-spazio vettoriale e $F : V \times V \to K$ una forma bilineare simmetrica.
   (a) Sia $S \subseteq V$. Dimostrare che $S^{\perp}$ è un sottspazio vettoriale di V.
   (b) Far vedere che il cono F-isotropo $I_F(V)$ non è in generale un sottospazio vettoriale di V. Tuttavia se $I_F(V) \neq \{0\}$ allora è $I_F(V)$ unione (insiemistica) di sottospazi vettoriali 1-dimensionali.

4. (a) Sia K un campo e siano $A, B \in M_n(K)$.
   Dimostrare che:
   $${}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x} B \overrightarrow{y}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n \Leftrightarrow A = B$$
   (b) Sia $A \in M_n(K)$ e sia $b : K^n \times K^n \to K$ la forma bilineare definita nel modo seguente: $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y}$. Dimostrare che
   $$b \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow A = {}^tA.$$

5. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_3 + x_1y_4 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_4y_4$$

$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4, \quad \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4).$

   (a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

   (b) Verificare che F è degenere e individuare un vettore non nullo $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^4$ tale che $F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \, \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4$.

   (c) Sia $\overrightarrow{v_0} = (2, 1, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$.
   Determinare due vettori $\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{y''} \in \mathbb{R}^4$ tali che:

$$\overrightarrow{y'} - 2\overrightarrow{y''} = (1, 1, 1, 1), \quad \text{con} \quad \overrightarrow{y'} \parallel \overrightarrow{v_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{y''} \perp \overrightarrow{v_0}$$

6. Sia $D : K^2 \times K^2 \to K$ l'applicazione così definita:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \forall \, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \, \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2.$$

   (a) Verificare che l'applicazione D (detta applicazione determinante) è una forma bilineare antisimmetrica.

   (b) Scrivere la matrice di D rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di K^2.

   (c) Calcolare il cono isotropo $I_D(K^2)$.

7. Determinare tutte le forme bilineari simmetriche su $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la base $\{(1, 1, 0), (0, -2, 1), (1, 0, 1)\}$ risulti diagonale.