Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Tutorato 1 (30 Settembre 2010)
Forme bilineari

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^2$:

   (a) $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$

   (b) $G((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + x_2y_2$

   (c) $H((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2y_1 + x_2y_2^2$

2. Stabilire quali delle seguenti sono forme bilineari su $\mathbb{R}^n$:

   (a) $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j)$

   (b) $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i)\Big)\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(y_j)\Big)$

   (c) $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(x_j)^2 - \sum_{j=1}^{n}(y_j)^2$

   (d) $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \Big|\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_jy_j)\Big|$

   (e) $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x}A\overrightarrow{y}, \qquad A \in M_n(\mathbb{R})$

3. Sia F una forma bilineare simmetrica assegnata su uno spazio vettoriale V. Sia $S \subseteq V$ un sottoinsieme di V. Dimostrare che

$$S^{\perp} = \langle S \rangle^{\perp}.$$

4. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_1 - 2x_3y_3$$

$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3).$

(a) Stabilire se F è simmetrica.

(b) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(c) Stabilire se F è degenere.

(d) Verificare che i sottospazi $U = \langle(1, 0, 0)\rangle$ e $W = \langle(0, -2, 1)\rangle$ sono ortogonali (*Nota*: due sottospazi U e W si dicono ortogonali se $U \subseteq W^\perp$ e $W \subseteq U^\perp$).

(e) Dimostrare che non esistono vettori isotropi del tipo $(0, n, m) \neq (0, 0, 0)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

(f) Sia $I_F(\mathbb{R}^3) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0\right\}$ il cono isotropo di F. Verificare che $\langle(1, 0, 0), (2, 2, -1)\rangle^\perp \subseteq I_F(\mathbb{R}^3)$.

5. Data la matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la forma bilineare G definita, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$, dalla matrice A.

(b) Verificare che G è non degenere.

(c) Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$. Determinare equazioni cartesiane per $W^\perp$.

(d) Verificare che $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$.

(e) Determinare i vettori G-isotropi in $W^\perp$

(f) Scrivere la matrice di G rispetto alla base $b = \{\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_4}\}$, dove

$$\overrightarrow{b_1} = \overrightarrow{e_4} \qquad \overrightarrow{b_2} = \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \qquad \overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{e_1} \qquad \overrightarrow{b_4} = \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_2}$$

6. Sia V lo spazio vettoriale delle matrice $n \times n$ su $\mathbb{R}$ e sia $N \in M_n(\mathbb{R})$. Sia

$$F(A, B) = tr({}^tAMB) \qquad A, B \in V$$

(*Nota*: Sia $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(C) = \sum_{j=1}^{n}(c_{jj})$).

(a) Dimostrare che F è una forma bilineare su V.

(b) Sia $n = 2$ e $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ trovare la matrice di F nella base canonica dello spazio delle matrici 2×2.

(c) Scrivere la matrice di F rispetto alla base $\mathbb{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, dove:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$