Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 6 (26 Novembre 2010)

Coniche

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}$ una sua base $\mathcal{B}$ ortonormale rispetto a un prodotto scalare $s : V \times V \to \mathbb{R}$. Si determinino:

   (a) Le matrici rispetto a $\mathcal{B}$ delle forme bilineari simmetriche F tali che

   - F è non degenere;
   - $\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}$ sono isotropi;
   - $F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_3}) = F(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}) = 0$;
   - $F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = F(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_3})$.

   (b) Determinare una base ortonormale diagonalizzante per ogni F.

   (Prova di esonero del 10-11-2008)

   Soluzione:

   (a) Sia A la matrice associata alla forma bilineare F rispetto alla base b. Innanzitutto poichè F è simmetrica, A sarà della forma:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   Inoltre:

   $$\begin{cases} \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2} \text{ sono isotropi} \Rightarrow F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_1}) = F(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_2}) = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{22} = 0 \\ F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_3}) = F(\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}) = 0 \Rightarrow a_{13} = a_{23} = 0 \\ F(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = F(\overrightarrow{b_3}, \overrightarrow{b_3}) \Rightarrow a_{12} = a_{33} \end{cases}$$

   Ponendo dunque $a = a_{33}$, la matrice A diventa:

   $$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   Infine sappiamo che F è non degenere, cioè che la matrice A associata a F ha rango massimo $\Rightarrow det(A) = -a^3 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$.

   (b) Sia φ l'operatore lineare rappresentato da A nella base ortonormale $\mathcal{B}$.
   Essendo A simmetrica, φ è simmetrico.
   Per il teorema spettrale esiste allora una base ortonormale di autovettori di φ. In particolare tali autovettori costituiranno anche una base diagonalizzante per la forma bilineare F.

   Per prima cosa determiniamo gli autovalori di φ e i corrispondenti autospazi.
   Il polinomio caratteristico di φ è:

   $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a\lambda^2 + a^2\lambda - a^3 = -(a-\lambda)^2(a+\lambda);$$

   pertanto φ ha autovalori $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -a$, rispettivamente con molteplicità algebrica 2 e 1. Troviamo i relativi autospazi:

- V_a è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_1 I_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -ax+ay=0 \\ ax-ay=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ax+ay=0 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} -x+y=0 \Rightarrow V_a = \langle (1,1,0),(0,0,1)\rangle = \left\langle \overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3}\right\rangle$$

Osserviamo che la base scelta per V_a è già ortogonale rispetto al prodotto scalare s: infatti $s(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}) = s(\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_3}) + s(\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}) = 0+0=0$ essendo $\{\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_3}\}$ una base ortonormale rispetto a s.

Una base ortonormale per V_a è quindi data da $\left\{\frac{\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2})}}, \frac{\overrightarrow{b_3}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_3},\overrightarrow{b_3})}}\right\}$.

- V_{-a} è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_2 I_3)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax+ay=0 \\ az=0 \end{cases} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$V_{-a} = \langle (1,-1,0)\rangle = \left\langle \overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2}\right\rangle$$

Una base ortonormale per V_{-a} è dunque data da $\left\{\frac{\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2})}}\right\}$.

Notiamo che, essendo φ simmetrico, gli autovettori che costituiscono l'autospazio V_a sono ortogonali agli autovettori che costituiscono l'autospazio V_{-a}, poichè, essendo $a \neq 0$, gli autovalori a e $-a$ sono distinti (Proposizione 22.5, Sernesi: Geometria 1); ciò vuol dire che $\forall \overrightarrow{v} \in V_a$, $\forall \overrightarrow{w} \in V_{-a}$ si ha $s(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 0$.

Ne segue che $\mathcal{D} = \left\{\frac{\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_1}+\overrightarrow{b_2})}}, \frac{\overrightarrow{b_3}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_3},\overrightarrow{b_3})}}, \frac{\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2}}{\sqrt{s(\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{b_1}-\overrightarrow{b_2})}}\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di φ e quindi di F.

2. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$x^2+5xy+6y^2-4=0.$$

(a) Riconoscere che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere e determinare la forma canonica ad essa affinemente equivalente.

(b) Trovare il luogo dei punti medi delle corde di $\mathcal{C}$ parallele al vettore $\overrightarrow{v} = (1,0)$ e verificare che tali punti medi sono allineati.

Soluzione:

3. (a) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 1 \neq 0$

$det(A_{00}) = -\frac{1}{4} < 0$

Pertanto, essendo $\det(A) \neq 0$ e $\det(A_{00}) < 0$, C è un'iperbole non degenere.

(b) Una corda di $\mathcal{C}$ parallel al vettore $\overrightarrow{v} = (1,0)$ è il segmento staccato da una retta parallela a $\overrightarrow{v}$ sulla conica $\mathcal{C}$.
Le rette parallele al vettore $\overrightarrow{v} = (1,0)$ sono parallele all'asse x e quindi hanno equazione $y = c$, $c \in \mathbb{R}$. Determiniamo i punti $P_c = (x_c, y_c), Q_c = (x_c^1, y_c^1)$ di intersezione tra tali rette e la conica:

$$\begin{cases} y = c \\ x^2 + 5xy + 6y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad P_c = (\tfrac{-5c+\sqrt{c^2+16}}{2}, c) \text{ e } Q_c = (\tfrac{-5c-\sqrt{c^2+16}}{2}, c).$$

Ricordiamo ora che dati due punti $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ il loro punto medio è $M_{\overline{AB}} = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.
Ne segue che il punto medio del segmento $\overline{P_cQ_c}$ è

$$M_{\overline{P_cQ_c}} = (-\frac{5}{2}c, c).$$

Si ha quindi:

$$\{M_{\overline{P_cQ_c}}, c \in \mathbb{R}\} = \{(x,y) |\, x = -\tfrac{5}{2}c \,\text{e}\, y = c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

cioè le coordinate di $M_{\overline{P_cQ_c}}$ soddisfano il sistema di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}c \\ y = c \end{cases}$$

in cui, eliminando il parametro c si ottiene l'equazione cartesiana.
Quindi, i punti medi delle corde sono tutti punti della retta di equazione $r : 2x + 5y = 0$, 0, e quindi sono allineati.

L'esempio proposto in questo esercizio illustra una proprietà generale delle coniche: i punti medi delle corde staccate su rette parallele ad una direzione fissata sono sempre allineati. La direzione di questa nuova retta si chiama direzione coniugata alla precedente. Gli assi di simmetria delle coniche hanno direzioni tra loro coniugate, e sono l'unica coppia di direzioni coniugate tra loro ortogonali.

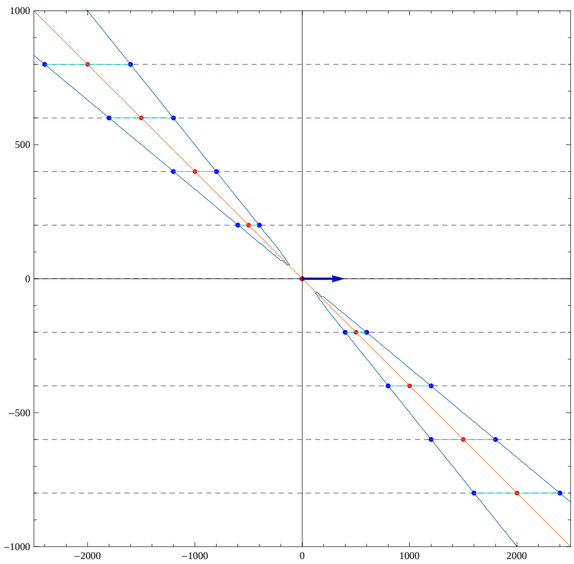

Figura 1: Esercizio 2

4. Sia data in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ di equazione:

$$x^2 + 6xy - by^2 - a = 0.$$

(a) Classificare $\mathcal{C}_{(a,b)}$ al variare di $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Esistono valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere?

(b) Determinare a e b tali che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti $P_1 = (0, \sqrt{2})$ e $P_2 = (1, -3 + \sqrt{10})$.

(c) Sia $\mathcal{C}$ la conica che verifica (c) e sia $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$. Esiste un'affinità T tale che $T(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$? In caso affermativo determinarla.

Soluzione:

(a) La matrice associata alla conica è:

$$A_{(a,b)} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -b \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00\,(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{pmatrix}$$

$det(A_{(a,b)}) = ab + 9a = a(b+9)$

$det(A_{00\,(a,b)}) = -b - 9$

Sappiamo che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è degenere se $det(A_{(a,b)}) = 0$, non degenere altrimenti; in particolare (nel caso in cui sia degenere) sarà semplicemente degenere se $r(A_{(a,b)}) = 2$, doppiamente degenere se $r(A_{(a,b)}) = 1$.

Nel nostro caso $det(A_{(a,b)}) = a(b+9) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = -9$. In particolare:

- se $a = 0$ e $b \neq -9$, la conica è semplicemente degenere poichè in tal caso il minore $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -b \end{vmatrix} = -b - 9 \neq 0$ e quindi $r(A_{(a,b)}) = 2$;
- se $a \neq 0$ e $b = -9$, la conica è semplicemente degenere poichè in tal caso il minore $\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -a \neq 0$ e quindi $r(A_{(a,b)}) = 2$;
- se $a = 0$ e $b = -9$, la conica è doppiamente degenere poichè in tal caso $A_{(0,-9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ da cui $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Analizziamo ora il segno di $det(A_{00\,(a,b)})$. Sappiamo che se $det(A_{00\,(a,b)}) \neq 0$ la conica è a centro e sarà un'iperbole nel caso in cui $det(A_{00\,(a,b)}) < 0$ e un'ellisse nel caso in cui $det(A_{00\,(a,b)}) > 0$; altrimenti, se $det(A_{00\,(a,b)}) = 0$, la conica è una parabola.

Nel nostro caso:

$$det(A_{00\,(a,b)}) = -b - 9 \Rightarrow \begin{cases} -b - 9 = 0 \Leftrightarrow b = -9 & \text{PARABOLA} \\ -b - 9 < 0 \Leftrightarrow b > -9 & \text{IPERBOLE} \\ -b - 9 > 0 \Leftrightarrow b < -9 & \text{ELLISSE} \end{cases}$$

In particolare vediamo che non esistono valori di (a,b) tali che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ sia una parabola non degenere, perchè per $b = -9$ $\mathrm{rg}(A) \leq 2$.

Rimane da stabilire per quali (a,b) con $b \in (-\infty, -9)$ si hanno ellissi a punti reali e per quali ellissi a punti non reali.
Sappiamo che ciò che differenzia un'ellisse a punti reali da un'ellisse a punti non reali

nella matrice $A_{(a,b)}$ è la segnatura; in particolare una conica sarà un'ellisse a punti reali se, oltre alla condizione $det(A_{00(a,b)}) > 0$, la segnatura della sua matrice associata è $(1, 2)$ o $(2, 1)$, sarà invece un'ellisse a punti non reali se la segnatura della sua matrice associata è $(3, 0)$ o $(0, 3)$ (cioè se la matrice associata è definita positiva o negativa).

Vediamo allora per quali valori di (a, b) la matrice è definita positiva e per quali è definita negativa. Calcoliamo i minori principali:

$$D_1 = -a \quad , \quad D_2 \left(\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = -a \quad , \quad D_3 \left(\begin{vmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -b \end{vmatrix} \right) = a(b + 9)$$

Ne segue che la matrice $A_{(a,b)}$:

- è definita positiva se:

$$\begin{cases} -a > 0 \\ a(b + 9) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < -9 \end{cases}$$

- è definita negativa se:

$$\begin{cases} -a > 0 \\ -a < 0 \\ a(b + 9) > 0 \end{cases}$$

  che è un sistema incompatibile.

Ne concludiamo allora che $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è un'ellisse a punti non reali se $a < 0$ e $b < -9$. $\mathcal{C}_{(a,b)}$ è invece un'ellisse a punti reali se $a > 0$ e $b < -9$.

Osservazione: equivalentemente si poteva determinare la segnatura (p, q) della matrice $A_{(a,b)}$ in uno dei due modi seguenti:

- studiando il segno degli autovalori dell'operatore ad essa associato: in tal caso p sarà dato dal numero di autovalori positivi e q dal numero di autovalori negativi.
- diagonalizzando la matrice con il metodo induttivo: in tal caso p sarà dato dal numero di valori positivi e q dal numero di autovalori negativi sulla diagonale della matrice diagonale congruente alla matrice di partenza.

(b) Imponiamo che la conica $\mathcal{C}_{(a,b)}$ passi per i punti P_1 e P_2. La coppia (a, b) dovrà allora soffisfare il seguente sistema:

$$\begin{cases} -2b - a = 0 \\ 1 - 18 + 6\sqrt{10} - 9b - 10b + 6\sqrt{10}b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ 1 - 18 + 6\sqrt{10} - 9b - 10b + 6\sqrt{10}b + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ (-17 + 6\sqrt{10})b = -17 + 6\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

La conica richiesta ha pertanto equazione:

$$x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0.$$

(c) Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0$. Sia $A := A_{(-2,1)}$ e $A_{00} := A_{00(-2,1)}$. Per quanto visto nel punto (a), $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica $\mathcal{C}'$ ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Sia f l'affinità tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

Sia ora $\mathcal{D}$ la conica di equazione $xy - 3x - 2y + 4 = 0$.

La matrice associata alla conica è:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad B_{00} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$det(B) = \frac{1}{2}$;

$det(B_{00}) = -\frac{1}{4}$.

$\mathcal{D}$ è quindi un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica $\mathcal{D}'$ ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Sia g l'affinità tale che $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

Essendo $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ affinemente equivalenti alla stessa forma canonica, esse saranno affinemente equivalenti; in particolare un'affinità h tale che $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ sarà data da $h = f^{-1} \circ g$.

Determiniamo f con il metodo di riduzione a forma canonica.

Per "trasformare" $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$ abbiamo a disposizione una successione finita di trasformazioni affini. Procediamo per vari passi:

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto $2a_{12}xy$**

  $$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

  Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

  Diagonalizziamo A_{00} con il metodo induttivo:

  Sia F la forma bilineare associata a A_{00}.
  $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ è un vettore non isotropo essendo $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

  Allora $\mathbb{R}^2 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

  $\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \right\}$.

  $F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y = 0$

  Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ \overrightarrow{w} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + 3y = 0 \right\}$.

  $\overrightarrow{v_2} = (-3,1) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -10$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per F e quindi per A_{00}.

  La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$:

  $$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{C}_1 = f_1(\mathcal{C})$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite l'affinità f_1 sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{C} : x^2 + 6xy - y^2 + 2 = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da f_1:

$$(x' - 3y')^2 + 6(x' - 3y')y' - (y')^2 + 2 = 0 \Rightarrow \mathcal{C}_1 : (x')^2 - 10(y')^2 + 2 = 0$$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

  Nell'equazione di $\mathcal{C}_1$ non compaiono termini di primo grado. Possiamo quindi passare al passo 3.

- **Passo 3: Normalizzazione dei coefficienti**

  Dividendo per il termine noto, l'equazione di $\mathcal{C}_1$ può essere riscritta nel modo seguente:

  $$\frac{1}{2}(x')^2 - 5(y'')^2 + 1 = 0$$

  Eseguendo la sostituzione (che corrisponde a un'affinità f_2):

  $$\begin{cases} x' = \sqrt{2}x'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

  si ottiene l'equazione di $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_2 = f_2(\mathcal{C}_1)$:

  $$\mathcal{C}' : (x'')^2 - (y'')^2 + 1 = 0$$

  che è l'equazione della forma canonica affinemente equivalente a $\mathcal{C}$.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Nei vari passi abbiamo applicato le affinità sostituendo le espressioni di x e y in funzione delle nuove x' e y' direttamente nell'equazione della conica.
Si poteva invece agire direttamente sulla matrice associata alla conica.
Infatti se f è un'affinità con equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

definendo

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix},$$

le equazioni di f possono essere espresse nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ora se A è la matrice associata a una conica $\mathcal{C}$, l'equazione di quest'ultima può essere espressa nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

Sostituendo la (1) nella (2) otteniamo l'equazione della conica $\mathcal{C}'$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite f, nelle nuove variabili x', y':

$$^t\left[\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}\right] A\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} {}^t\tilde{M}A\tilde{M}\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

In particolare $A' = {}^t\tilde{M}A\tilde{M}$ è la matrice associata a $\mathcal{C}'$.

Ricapitolando, nei vari passi abbiamo applicato a $\mathcal{C}$ le affinità f_1 e f_2, definite dalle seguenti equazioni:

$$f_1 : \begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = y' \end{cases} \qquad f_2 : \begin{cases} x' = \sqrt{2}x'' \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases}$$

Si ha:

$\mathcal{C}' = f_2(\mathcal{C}_1) = f_2(f_1(\mathcal{C})) \Rightarrow \mathcal{C}' = f_2 \circ f_1((\mathcal{C}))$.

Sia $f = f_2 \circ f_1$, allora $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$; determiniamo le equazioni di f componendo f_1 e f_2:

$$\begin{cases} x = x' - 3y' \\ y = y' \end{cases} \overset{f_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \sqrt{2}x'' - \frac{3}{\sqrt{5}}y'' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}y'' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Posto dunque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, f ha equazioni:

$$f(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} X$$

da cui f^{-1} ha equazioni:

$$f^{-1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1} X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} X$$

<u>Determiniamo ora g con il metodo di riduzione a forma canonica.</u>

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo B_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(\mathbb{R})$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo B_{00} con il metodo induttivo:

Sia G la forma bilineare associata a B_{00}.
$\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=(1,1)$ è un vettore non isotropo essendo $G(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2})=1$. Pertanto $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}$ costituirà il primo vettore della nostra base diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^2=\langle\overrightarrow{v_1}\rangle\oplus\overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$\overrightarrow{v_1}^{\perp}=\left\{\overrightarrow{w}=(x,y)\in\mathbb{R}^2|G(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w})=0\right\}$.

$G(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{w})=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^{\perp}=\left\{\overrightarrow{w}=(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y=0\right\}$.

$\overrightarrow{v_2}=(-1,1)\in\overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $G(\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_2})=-1$. Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ è una base diagonalizzante per G e quindi per B_{00}.
La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

e se (x,y) e (x',y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità g_1 di equazioni:

$$\begin{cases}x=x'-y'\\ y=x'+y'\end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\mathcal{D}_1=g_1(\mathcal{D})$ affinemente equivalente a $\mathcal{D}$ tramite l'affinità g_1 sostituiamo nell'equazione di $\mathcal{D}:xy-3x-2y+4=0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da f_1:

$(x'-y')(x'+y')-3(x'-y')-2(x'+y')+4=0\Rightarrow\mathcal{D}_1:(x')^2-(y')^2-5x'+y'+4=0.$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

  A partire dall'equazione di $\mathcal{D}_1$, applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

  $(x')^2-(y')-5x'+y'+4=0\Rightarrow[(x')^2-5x'+\frac{25}{4}]-[(y')^2-y'+\frac{1}{4}]-\frac{25}{4}+\frac{1}{4}+4=0\Rightarrow$

  $\Rightarrow(x'-\frac{5}{2})^2-(y'-\frac{1}{2})^2-2=0$

  Quindi se applichiamo a $\mathcal{D}_1$ la traslazione g_2:

  $$\begin{cases}x''=x'-\frac{5}{2}\\ y''=y'-\frac{1}{2}\end{cases}$$

  si ottiene la conica $\mathcal{D}_2=g_2(\mathcal{D}_1)$ affinemente equivalente a $\mathcal{D}_1$ di equazione:

  $$\mathcal{D}_2:(x'')^2-(y'')^2-2=0$$

  Dividendo per il termine noto, la precedente equazione può essere riscritta nel modo seguente:

  $$\mathcal{D}_2:\frac{1}{2}(x'')^2-\frac{1}{2}(y'')^2=1$$

- **Passo 3: Normalizzazione dei coefficienti**

  Eseguendo la sostituzione (che corrisponde a un'affinità g_3):

  $$\begin{cases} x'' = \sqrt{2}x''' \\ y'' = \sqrt{2}y'' \end{cases}$$

  si ottiene l'equazione di $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_3 = g_3(\mathcal{D}_2)$:

  $$\mathcal{D}_3 : (x''')^2 - (y''')^2 = 1$$

  che è l'equazione della forma canonica affinemente equivalente a $\mathcal{D}$

Ricapitolando, nei vari passi abbiamo applicato a $\mathcal{D}$ le affinità g_1, g_2 e g_3, definite dalle seguenti equazioni:

$$g_1 : \begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases} \qquad g_2 : \begin{cases} x'' = x' - \frac{5}{2} \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad g_3 : \begin{cases} x'' = \sqrt{2}x''' \\ y'' = \sqrt{2}y''' \end{cases}$$

Si ha:

$\mathcal{D}' = g_3(\mathcal{D}_2) = g_3(g_2(\mathcal{D}_1)) = g_3(g_2(g_1(\mathcal{D}))) \Rightarrow \mathcal{D}' = g_3 \circ g_2 \circ g_1((\mathcal{D}))$.

Sia $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, allora $\mathcal{D}' = g(\mathcal{D})$; determiniamo le equazioni di g componendo g_1, g_2 e g_3:

$$\begin{cases} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{cases} \overset{g_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x = x'' + \frac{5}{2} - y'' - \frac{1}{2} \\ y = x'' + \frac{5}{2} + y'' + \frac{1}{2} \end{cases} \overset{g_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \sqrt{2}x''' + \frac{5}{2} - \sqrt{2}y''' - \frac{1}{2} \\ y = \sqrt{2}x''' + \frac{5}{2} + \sqrt{2}y''' + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}x''' - \sqrt{2}y''' + 2 \\ y = \sqrt{2}x''' + \sqrt{2}y''' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Posto dunque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ g ha equazioni:

$$g(X) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

In definitiva un'affinità h tale che $h(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$, data da $f^{-1} \circ g$, ha equazioni:

$$h(X) = f^{-1} \circ g(X) = f^{-1}(g(X)) = f^{-1}\left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 5\frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{10+3\sqrt{10}}{20} & \frac{10-3\sqrt{10}}{20} \\ -\frac{\sqrt{10}}{20} & \frac{\sqrt{10}}{20} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{2-3\sqrt{10}}{4} \\ \frac{\sqrt{10}}{4} \end{pmatrix}$$

5. Sia $\mathcal{C}$ una conica affine avente equazione

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sia $A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

(a) Posto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix}$, verificare che $F(x,y) = {}^t X A_{00} X + 2\,{}^t\overrightarrow{a}\,X + a_{00}$.

(b) Verificare che il rango di A e il segno di $\det A_{00}$ sono invarianti affini.

(c) Dimostrare che $\mathcal{C}$ è una conica a centro $\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto ad un unico punto P_0, dove le coordinate di $P_0 = (x_0, y_0)$ (detto *centro*) sono soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

(d) Sia $\mathcal{D}$ è una conica a centro con centro nel punto Q_0. Dimostrare che se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono affinemente equivalenti tramite l'affinità f (cioè $f(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$) allora risulta $f(Q_0) = P_0$.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) $F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0.$

Indicando allora con $Q(x,y)$ e $L(x,y)$ le componenti omogenee di gradi rispettivamente 2 e 1 di F(x,y), si ha:

$Q(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = {}^t X A_{00} X$
$L(x,y) = 2a_{01}x + 2a_{02}y = 2(a_{01}x + a_{02}y) = 2\,{}^t\overrightarrow{a}\,X.$

Risulta quindi:

$F(x,y) = Q(x,y) + L(x,y) + a_{00} =^t X A_{00} X + 2\,{}^t\overrightarrow{a}\,X + a_{00}.$

(b)
- Vogliamo far vedere che una trasformazione affine non modifica il rango della matrice associata alla conica.
  Sia f un'affinità. Allora f^{-1}, affinità inversa di f, avrà equazioni della forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

  Definendo

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix},$$

  le equazioni di f^{-1} possono essere espresse nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3}$$

  Sia:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{4}$$

  l'equazione della conica $\mathcal{C}$.
  Sostituendo la (3) nella (4) otteniamo l'equazione della conica $\mathcal{D}$ affinemente equivalente a C tramite f, nelle nuove variabili x', y':

$${}^t\left[\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}\right] A\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} {}^t\tilde{M} A \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Osserviamo che $B = {}^t\tilde{M}A\tilde{M}$ è la matrice associata a $\mathcal{D}$.

Allora vale che:

$\text{rg}(B) = \text{rg}({}^t\tilde{M}A\tilde{M}) = \text{rg}(A)$,

dove nell'ultimo passaggio, essendo $\tilde{M}$ invertibile, abbiamo sfruttato la seguente proprietà del rango:
date $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $D \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rg}(CD) = \text{rg}(C)$.

- Vogliamo far vedere che una trasformazione affine non modifica il segno del determinante di A_{00}.
Sia f un'affinità. Allora f^{-1}, affinità inversa di f, avrà equazioni della forma:

$$X = MX' + \overrightarrow{v}, \qquad \text{dove} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Per quanto dimostrato in (a), possiamo scrivere l'equazione della conica $\mathcal{C}$ nel modo seguente:

$$F(x,y) = {}^tXA_{00}X + 2\,{}^t\overrightarrow{a}X + a_{00} = 0$$

L'equazione della conica $\mathcal{D}$ affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ tramite f sarà allora:

$$\begin{aligned}
&{}^t(MX' + \overrightarrow{v})A_{00}(MX' + \overrightarrow{v}) + 2\,{}^t\overrightarrow{a}(MX' + \overrightarrow{v}) + a_{00} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow ({}^tX'\,{}^tM + {}^t\overrightarrow{v})A_{00}(MX' + \overrightarrow{v}) + 2\,{}^t\overrightarrow{a}(MX' + \overrightarrow{v}) + a_{00} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow {}^tX'\,{}^tMA_{00}MX' + {}^tX'\,{}^tMA_{00}\overrightarrow{v} + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}MX' + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + 2\,{}^t\overrightarrow{a}(MX' + \overrightarrow{v}) + a_{00} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow {}^tX'\,{}^tMA_{00}MX' + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}MX' + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}MX' + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + 2\,{}^t\overrightarrow{a}MX' + 2\,{}^t\overrightarrow{a}\overrightarrow{v} + a_{00} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow {}^tX'\,{}^tMA_{00}MX' + ({}^t\overrightarrow{v}A_{00}M + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}M + 2\,{}^t\overrightarrow{a}M)X' + 2\,{}^t\overrightarrow{a}\overrightarrow{v} + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + a_{00} = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow {}^tX'\,{}^tMA_{00}MX' + 2({}^t\overrightarrow{v}A_{00}M + {}^t\overrightarrow{a}M)X' + 2\,{}^t\overrightarrow{a}\overrightarrow{v} + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + a_{00} = 0,
\end{aligned}$$

cioè $\mathcal{D}$ ha equazione:

$${}^tX'B_{00}X' + 2\,{}^t\overrightarrow{b}X' + b_{00} = 0,$$

dove:

$$B_{00} = {}^tMA_{00}M, \quad \overrightarrow{b} = {}^tMA_{00}\overrightarrow{v} + {}^tM\overrightarrow{a} \quad \text{e} \quad b_{00} = 2\,{}^t\overrightarrow{a}\overrightarrow{v} + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + a_{00}.$$

In particolare vale che:

$\det(B_{00}) = \det({}^tMA_{00}M) = \det({}^tM)\det(A)\det(M) = \det^2(M)\det(A) \lesseqqgtr 0 \Leftrightarrow \det(A) \lesseqqgtr 0$.

(c)($\Leftarrow$): Se $\mathcal{C}$ è simmetrica rispetto ad un unico punto P_0, dove le coordinate di $P_0 = (x_0, y_0)$ (detto *centro*) sono soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{02} + a_{12}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

allora, per il teorema di Rouché-Capelli, il determinante delle incognite del sistema è diverso da 0, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \qquad \mathcal{C} \text{ è una conica a centro.}$$

($\Rightarrow$): Sia $\mathcal{C}$ una conica a centro $\Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Sia f la simmetria rispetto a un generico punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Per quanto visto nel tutorato precedente, f ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = 2x_0 - x' \\ y = 2y_0 - y' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & -1 & 0 \\ 2y_0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Determiniamo allora le coordinate di P_0 in modo tale che $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Risulta innanzitutto:

$$f(\mathcal{C}) : \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2x_0 & 2y_0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & -1 & 0 \\ 2y_0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\|$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{00} + 2x_0(2a_{01} + 2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0) + \\ \quad +2y_0(2a_{02} + 2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0) & -a_{01} - 2a_{11}x_0 - 2a_{12}y_0 & -a_{02} - 2a_{12}x_0 - 2a_{22}y_0 \\ -a_{01} - 2a_{11}x_0 - 2a_{12}y_0 & a_{11} & a_{12} \\ -a_{02} - 2a_{12}x_0 - 2a_{22}y_0 & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Osserviamo che due polinomi definiscono la stessa conica quando sono proporzionali. Quindi, affinchè le matrici associate a $\mathcal{C}$ e $f(\mathcal{C})$, rispettivamente A e B, definiscano la stessa conica, A e B devono essere proporzionali (cioè deve esistere $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tale che $\alpha A = B$).

Determiniamo allora (x_0, y_0) tali che $\alpha A = B$, $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ne deriviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{00} + 2x_0(2a_{01} + 2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0) + 2y_0(2a_{02} + 2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0) = \alpha a_{00} \\ -a_{01} - 2a_{11}x_0 - 2a_{12}y_0 = \alpha a_{01} \\ -a_{02} - 2a_{12}x_0 - 2a_{22}y_0 = \alpha a_{02} \\ a_{11} = \alpha a_{11} \\ a_{12} = \alpha a_{12} \\ a_{22} = \alpha a_{22} \end{cases}$$

Poichè $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. almeno uno tra a_{11}, a_{12}, a_{22} deve essere diverso da 0, da cui la costante di proporzionalità α è uguale a 1.
Inoltre le prime tre equazioni sono linearmente dipendenti e in particolare la prima è soddisfatta per i valori di (x_0, y_0) che soddisfano la seconda e la terza equazione. In conclusione il sistema precedente è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = 0 \\ a_{02} + a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = 0 \end{cases} \qquad (\Leftrightarrow A_{00}X + \overrightarrow{a} = 0)$$

il quale possiede un'unica soluzione per il teorema di Rouché-Capelli ($\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = 2$).

Esiste dunque un unico punto $P_0 = (x_0, y_0)$ rispetto al quale $\mathcal{C}$ è simmetrica, le cui coordinate sono soluzione del precedente sistema lineare.

(d) Sia $P_0 = \overrightarrow{x_0} = (\alpha, \beta)$ il centro di $\mathcal{C}$. Per quanto visto nel punto precedente $\overrightarrow{x_0}$ è soluzione del sistema lineare: $A_{00}X + \overrightarrow{a} = 0$. Ne segue che $\overrightarrow{x_0} = -A_{00}^{-1}\overrightarrow{a}$.

Sia f un'affinità. Allora f^{-1}, affinità inversa di f, avrà equazioni della forma:

$$X = MX' + \overrightarrow{v}, \qquad \text{dove} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Allora, per quanto visto nel punto (b), $\mathcal{D} = f(\mathcal{C})$ ha equazione:

$${}^tX'B_{00}X' + 2\,{}^t\overrightarrow{b}\,X' + b_{00} = 0,$$

dove $B_{00} = {}^tMA_{00}M$, $\quad \overrightarrow{b} = {}^tMA_{00}\overrightarrow{v} + {}^tM\overrightarrow{a} \quad$ e $\quad b_{00} = 2\,{}^t\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{v} + {}^t\overrightarrow{v}A_{00}\overrightarrow{v} + a_{00}$.

Sia $Q_0 = \overrightarrow{y_0} = (\gamma, \delta)$ il centro di $\mathcal{D}$. Allora $\overrightarrow{y_0}$ è soluzione del sistema lineare:
$0 = B_{00}X' + \overrightarrow{b} = {}^tMA_{00}MX' + {}^tMA_{00}\overrightarrow{v} + {}^tM\overrightarrow{a} = {}^tM(A_{00}MX' + A_{00}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{a})$.
Ne segue che
$\overrightarrow{y_0} = -(A_{00}M)^{-1}(\overrightarrow{a} + A_{00}\overrightarrow{v})$.

Basta quindi dimostrare che $f(Q_0) = P_0$, cioè che $M\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{x_0}$. Infatti:

$M\overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{v} = M[-(A_{00}M)^{-1}(\overrightarrow{a} + A_{00}\overrightarrow{v})] + \overrightarrow{v} = M[-M^{-1}A_{00}^{-1}(\overrightarrow{a} + A_{00}\overrightarrow{v})] + \overrightarrow{v} = -A_{00}^{-1}\overrightarrow{a} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} = -A_{00}^{-1}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{x_0}$.

6. Sia $\mathcal{C}$ l'ellisse di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0.$$

(a) Determinare tutte le isometrie di $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ che trasformano $\mathcal{C}$ nella forma canonica $\mathcal{D}$ ad essa congruente.

(b) Determinarne il centro, i due assi di simmetria e i quattro vertici.

Soluzione:

Attenzione: E' stata effettuata una correzione rispetto al testo distribuito in classe (in particolare è stato modificato il segno del termine noto nell'equazione della conica).

(a) La matrice associata alla conica è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Per "trasformare" $\mathcal{C}$ nella sua corrispondente forma canonica $\mathcal{D}$ abbiamo a disposizione una successione finita di isometrie.

Essendo A_{00} simmetrica, per il teorema spettrale, è possibile trovare una matrice ortogonale M tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.
Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}.
Il polinomio caratteristico di A_{00} è $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$. Pertanto A_{00} ha autovalori: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.
Due autovettori corrispondenti sono: $\overrightarrow{v_1} = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $\overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\|\overrightarrow{v_1}\| = 1 = \|\overrightarrow{v_2}\|$, tali vettori costituiscono una base diagonalizzante A_{00} e ortonormale per il prodotto scalare standard.
La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ (essa è infatti ortogonale, poichè è la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali):

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ e nella base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'isomtria f di equazioni: $\begin{cases} x' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \\ y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}$.

In particolare f è un'isometria inversa con almeno un punto fisso (l'origine), cioè una riflessione. Posto $\vartheta = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$, l'asse della riflessione è la retta passante per l'origine e formante un angolo ϑ con la direzione negativa dell'asse delle x.

L'isometria f trasforma $\mathcal{C}$ nella conica $f(\mathcal{C})$ di equazione:

$$(x')^2 + 6(y')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{8}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$$

Allo scopo di eliminare i termini di primo grado di tale equazione, consideriamo la generica traslazione t di vettore (α, β):

$$\begin{cases} x'' = x' + \alpha \\ y'' = y' + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x'' - \alpha \\ y' = y'' - \beta \end{cases}.$$

La conica trasformata $t(f(\mathcal{C}))$ ha equazione:

$0 = (x'' - \alpha)^2 + 6(y'' - \beta)^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}(x'' - \alpha) - \frac{8}{\sqrt{5}}(y'' - \beta) + 3 =$

$= (x'')^2 + 6(y'')^2 + (-2\alpha + \frac{6}{\sqrt{5}})x'' + (-12\beta - \frac{8}{\sqrt{5}})y'' + \alpha^2 + 6\beta^2 + 3$

Dovremo allora scegliere (α, β) in modo tale che:

$$\begin{cases} (-2\alpha + \frac{6}{\sqrt{5}}) = 0 \\ (-12\beta - \frac{8}{\sqrt{5}}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{cases}$$

Posto $\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$, t è una traslazione di vettore $(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$ e $t(f(\mathcal{C}))$ ha equazione:

$$(x'')^2 + 6(y'')^2 - \frac{16}{5} = 0$$

Dividendo per il termine noto troviamo la forma canonica congruente a $\mathcal{C}$:

$$\frac{(x'')^2}{\frac{16}{5}} + \frac{(y'')^2}{\frac{8}{15}} = 1$$

7. - **Centro di simmetria**
   Le coordinate (x_0, y_0) del centro di simmetria P_0 sono le soluzioni del seguente sistema:

   $$\begin{cases} -2 + 2x + 2y = 0 \\ -1 + 2x + 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

   Pertanto il centro di simmetria è il punto $(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$.

   - **Assi di simmetria**
   Gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono le rette s e t passanti per il centro di simmetria e aventi direzione data dai due autovettori associati agli autovalori di A_{00}.

   Abbiamo visto nel punto (a) che $v_1 = (-2, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$ sono due autovettori relativi

rispettivamente a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 6$.
Le rette s e t hanno allora equazioni:

$$s : \begin{vmatrix} x - \frac{4}{3} & y + \frac{1}{3} \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y - \frac{2}{3} = 0$$

$$t : \begin{vmatrix} x - \frac{4}{3} & y + \frac{1}{3} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y - \frac{5}{3} = 0$$

Notiamo che essendo i vettori di direzione ortogonali, le rette s e t sono perpendicolari.

- **Vertici**
  I quattro vertici di $\mathcal{C}$, P_1, P_2, P_3 e P_4, sono le intersezioni di $\mathcal{C}$ con gli assi di simmetria:

$$\begin{cases} x + 2y - \frac{2}{3} = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y + \frac{2}{3} \\ 2(-2y + \frac{2}{3})^2 + 4(-2y + \frac{2}{3})y + 5y^2 - 4(-2y + \frac{2}{3}) - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2y + \frac{2}{3} \\ 45y^2 + 30y - 43 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (\tfrac{4}{3} - \tfrac{8\sqrt{15}}{15}, -\tfrac{1}{3} + \tfrac{4\sqrt{15}}{15}),\ P_2 = (\tfrac{4}{3} + \tfrac{8\sqrt{15}}{15}, -\tfrac{1}{3} - \tfrac{4\sqrt{15}}{15})$$

$$\begin{cases} 2x - y - \frac{5}{3} = 0 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{5}{3} \\ 2x^2 + 4x(2x - \frac{5}{3}) + 5(2x - \frac{5}{3})^2 - 4x - 2(2x - \frac{5}{3}) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - \frac{5}{3} \\ 135x^2 - 216x + 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_3 = (\tfrac{4}{5} - \tfrac{4\sqrt{21}}{45}, -\tfrac{1}{15} - \tfrac{8\sqrt{21}}{45}),\ P_4 = (\tfrac{4}{5} + \tfrac{4\sqrt{21}}{45}, -\tfrac{4}{15} + \tfrac{8\sqrt{21}}{45})$$

8. Determinare le equazioni di tutte le coniche degeneri a centro $\mathcal{C}$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:
   (a) aventi centro in $C = (0, -1)$ e passanti per i punti $P_1 = (1, 2i)$ e $P_2 = (2, 1)$.
   (b) aventi centro in $C = (-3, 1)$ e passanti per i punti $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (1, -1)$.

<u>*Soluzione:*</u>

Per prima cosa osserviamo che ogni conica degenere a centro in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ si spezza in due rette distinte.
Infatti una siffatta conica $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente tramite un'affinità f alla forma canonica $\mathcal{D}$ di equazione $X^2 + Y^2 = 0 \Rightarrow (X + iY)(X - iY) = 0$, che si spezza quindi nelle rette $r : X + iY = 0$ e $s : X - iY = 0 \Rightarrow \mathcal{D} = r \cup s$.
Ma allora $\mathcal{C} = f^{-1}(\mathcal{D}) = f^{-1}(r) \cup f^{-1}(s)$, dove $f^{-1}(r)$ e $f^{-1}(s)$ sono rette, in quanto essendo un'affinità, f^{-1} manda rette in rette.

Inoltre C è il centro di simmetria di una conica a centro degenere $\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ si spezza in due rette distinte r e s passanti per C (cioè tali che $r \cap s = C$).

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle coniche passanti per il centro C e per i punti P_1 e P_2.
Consideriamo due casi:

- i tre punti P_1, P_2 e C sono allineati $\Rightarrow \mathcal{F} = \{r \cup s | r \ni P_1, P_2, C \text{ e } s \ni C\}$;
- i tre punti P_1, P_2 e C non sono allineati $\Rightarrow \mathcal{F} = \{r \cup s | r \ni P_1, C \text{ e } s \ni P_2, C\}$ e tale insieme consiste di un unico elemento.

(a) Nel primo caso i tre punti non sono allineati (infatti i vettori $\overrightarrow{CP_1} = (1, 2i + 1)$ e $\overrightarrow{CP_2} = (2, 2)$ non sono paralleli).

Pertanto l'unica conica del tipo richiesto ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 \\ 1 & 2i+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y+1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ cioè}$$

$$[(2i+1)x - y - 1](x - y - 1) = 0$$

(b) Nel secondo caso i tre punti sono allineati (infatti i vettori $\overrightarrow{CP_1} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{CP_2} = (4, -2)$ sono paralleli).
Pertanto le coniche del tipo richiesto hanno equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y+1 \\ l & m \end{vmatrix} = 0, \text{ cioè}$$

$$(-x - 2y - 2)(mx - ly - l) = 0, \quad (l, m) \in \mathbb{R}^2$$

da cui $\mathcal{F} = \{(-x - 2y - 2)(mx - ly - l) | (l, m) \in \mathbb{R}^2\}$.