Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 5 (19 Novembre 2010)

Affinità e teorema spettrale

1. Sia f un'affinità di $\mathbb{A}$. Verificare che se f fissa due punti P e $Q \in \mathbb{A}$ allora f fissa tutti i punti della retta r passante per P e Q.

   Soluzione:

   Sia R un punto qualsiasi della retta r. Vogliamo dimostrare che $f(R) = R$.
   Notiamo che, essendo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ vettori paralleli, si avrà $\overrightarrow{PR} = c\overrightarrow{PQ}$ con $c \in K$.
   Sappiamo inoltre per ipotesi che $f(P) = P$ e $f(Q) = Q$.
   Allora dalla definizione di affinità (un'affinità è una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che esista un isomorfismo $\varphi : V \to V$ tale che $\forall P, Q \in \mathbb{A}$ $\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$) si avrà:

   $\overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(c\overrightarrow{PQ}) = c\varphi(\overrightarrow{PQ}) = c\overrightarrow{f(P)f(Q)} = c\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{PR}$

   Ne segue che $f(R) = R$. Infatti essendo $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, $\forall\, P \in \mathbb{A}$, $\forall\, v \in V$ $\exists!\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$

2. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ un piano affine con riferimento Oe_1e_2.

   (a) Determinare l'equazione di ogni affinità (f, φ) di $\mathbb{A}$ che fissi i punti della retta r di equazione $3x = y + 1$.

   (b) Tra le affinità considerate in (a) si determinino quelle (eventuali) tali che $\varphi(e_1) = e_1+e_2$.

   (c) Tra le affinità considerate in (a) si determinino le eventuali traslazioni.

   Soluzione:

   (a) L'equazione generale di un'affinità in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è:

   $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

   con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (questa è la condizione affinchè l'operatore φ associato a f, rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sia un automorfismo)

   Dall'esercizio precedente sappiamo che un'affinità f fissa tutti i punti di una retta $r \Leftrightarrow$ f fissa due punti distinti di r.
   Nel nostro caso r ha equazione $3x = y + 1$. Pertanto, scelti ad esempio in r i punti $P_1 = (0, -1)$ e $P_2 = (1, 2)$, le affinità richieste sono tutte e sole quelle che fissano P_1 e P_2.
   Imponiamo allora che $f(P_1) = P_1$ e $f(P_2) = P_2$:

   $$f(P_1) = P_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -b + e = 0 \\ -d + f = -1 \end{cases}$$

$$f(P_2) = P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + e = 1 \\ c + 2d + f = 2 \end{cases}$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di 4 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} -b + e = 0 \\ -d + f = -1 \\ a + 2b + e = 1 \\ c + 2d + f = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = e \\ f = d - 1 \\ a = 1 - 3b \\ c = 3 - 3d \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema è in funzione di due parametri (b e d). Le affinità richieste hanno dunque equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3b & b \\ 3 - 3d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ d - 1 \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} 1 - 3b & b \\ 3 - 3d & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (1 - 3b)d - (3 - 3d)b = d - 3bd - 3b + 3bd = d - 3b \neq 0 \Rightarrow d \neq 3b$

(b) Imponiamo l'ulteriore condizione $\varphi(e_1) = e_1 + e_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3b & b \\ 3 - 3d & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 3b = 1 \\ 3 - 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi l'unica affinità del tipo richiesto è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(c) Un'affinità è una traslazione se e solo se il suo isomorfismo associato φ è l'identità. Pertanto, nel nostro caso, risulta:

$$f \text{ è una traslazione} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 3b & b \\ 3 - 3d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0, d = 1.$$

Ne segue che l'unica traslazione del tipo richiesto è l'identità in quanto, imponendo i valori di b e d appena trovati nelle equazioni delle affinità trovate nel punto (a), si ottiene: $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

3. Sia fissato un riferimento cartesiano Oe_1e_2 di $\mathbb{E}^2$.
Siano ρ la riflessione di asse la retta $r : x - 2y = 1$ e σ la rotazione di centro $P_0 = (1, 2)$ e angolo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

   (a) Scrivere le equazioni di ρ e σ.

   (b) Determinare le equazioni delle isometrie f e g tali che $f \circ \rho = \sigma$ e $\rho = g \circ \sigma$ e indicare di che tipo di isometrie si tratta.

<u>*Soluzione:*</u>

(a)
- **Metodo 1**
  Le equazioni di una riflessione ρ_s, dove s è una retta passante per l'origine $O = (0, 0)$ e formante un angolo ϑ con la direzione positiva dell'asse delle x è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2\vartheta & sin2\vartheta \\ sin2\vartheta & -cos2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se ϑ non è noto, a partire dall'equazione della retta s (che sarà del tipo $y = mx \Rightarrow m = tg\vartheta$), $cos2\vartheta$ e $sin2\vartheta$ possono essere ricavati nel modo seguente:

$$cos\vartheta = \frac{1 - tg^2\frac{\vartheta}{2}}{1 + tg^2\frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow cos2\vartheta = \frac{1 - tg^2\vartheta}{1 + tg^2\vartheta} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$
$$sen\vartheta = \frac{2tg\frac{\vartheta}{2}}{1 + tg^2\frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow sen2\vartheta = \frac{2tg\vartheta}{1 + tg^2\vartheta} = \frac{2m}{1 + m^2}$$

Pertanto le equazioni di una riflessione ρ_s, con $s : y = mx$ è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se ora $s : y = mx + q$ è una retta qualsiasi, tale che $P = (0, y_0)$ sia il suo punto di intersezione con l'asse y, ρ_s può essere ottenuta nel modo seguente: si trasla dapprima P nell'origine O (traslazione di vettore $\overrightarrow{PO}$) in modo tale che s venga trasformata in una retta s' parallela ad essa e passante per l'origine, si effettua la riflessione rispetto alla retta $s' : y = mx$ e infine si trasla O in P (traslazione di vettore $\overrightarrow{OP}$). Questo formalmente equivale alla seguente composizione:

$\rho_s = t_{\mathbf{c}} \circ \rho_{s'} \circ t_{-\mathbf{c}}$, dove $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$.

Posto dunque $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$\rho_s(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}} \circ \rho_s \circ t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}}(\rho_s(t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}))) = t_{\mathbf{c}}(\rho_s(\mathbf{x} - \mathbf{c})) = t_{\mathbf{c}}(A(\mathbf{x} - \mathbf{c})) = A(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$.

Nel nostro caso, essendo la retta r di equazione $r : x - 2y = 1$, $\mathbf{c} = (0, -\frac{1}{2})$ e $m = \frac{1}{2}$, cioè $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Pertanto si ottiene che ρ_r ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \end{cases}$$

- **Metodo 2**
  L'equazione generale di una riflessione ρ_r di asse la retta r è:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  Per determinare i parametri a, b, p e q si impone la condizione che i punti di r siano fissati da ρ_r (in quanto ogni riflessione lascia invariati i punti del suo asse). Abbiamo visto nel primo esercizio che un'isometria fissa tutti i punti di una retta $\Leftrightarrow$ fissa due punti distinti di essa. Pentanto è sufficiente imporre la condizione che presi due punti qualsiasi di r, essi sono fissati da ρ_r. In tal modo l'equazione risulta determinata in modo univoco.

  Consideriamo il nostro caso.

$P(-1,-1)$ e $Q(1,0) \in r$. Per quanto appena visto, possiamo determinare i parametri a, b, p, q dell'equazione generale imponendo che P e Q siano punti fissi per ρ_r:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -a - b + p \\ -1 = -b + a + q \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + p \\ 0 = b + q \end{cases}$$

Risolviamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = a + p \\ 0 = b + q \\ -1 = -a - b + p \\ -1 = -b + a + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - p \\ b = -q \\ -1 = -1 + p + q + p \\ -1 = q + 1 - p + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - p \\ b = -q \\ q = -2p \\ p = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{4}{5} \\ p = \frac{2}{5} \\ q = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della riflessione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- **Metodo 1**
  L'equazione di una rotazione $R_{O,\vartheta}$ di centro $O = (0,0)$ e angolo ϑ (in senso antiorario) è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Ora, se $P = (x_0, y_0)$ è un punto qualsiasi, la rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro P ed angolo ϑ (in senso antiorario) può essere ottenuta nel modo seguente: si trasla dapprima P nell'origine O (traslazione di vettore $\overrightarrow{PO}$), si effettua la rotazione di centro O e angolo ϑ (in senso antiorario) e infine si trasla O in P (traslazione di vettore $\overrightarrow{OP}$). Questo formalmente equivale alla seguente composizione:

  $R_{P,\vartheta} = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}$, dove $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$.

  Posto dunque $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

  $R_{P,\vartheta}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}))) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(\mathbf{x}-\mathbf{c})) = t_{\mathbf{c}}(A(\mathbf{x}-\mathbf{c})) = A(\mathbf{x}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$.

  Nel nostro caso $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

  Pertanto si ottiene che $R_{P,\vartheta}$ ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases}$$

- **Metodo 2**
  L' equazione di una rotazione $R_{P,\vartheta}$ di angolo ϑ (in senso antiorario) e di centro $P(x_0, y_0)$ qualsiasi è della forma:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Per determinare i parametri p e q si impone la condizione che P sia un punto fisso (in quanto ogni rotazione lascia invariato il suo centro). In tal modo l'equazione risulta determinata in modo univoco.

Nel nostro caso avremo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove p e q sono determinati dal sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2 + p \\ 2 = 1 + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = 1 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della rotazione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Nel punto precedente abbiamo determinato le equazioni di ρ e σ:

$$\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+3 \\ x+1 \end{pmatrix}$$

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- Determiniamo le equazioni dell'isometrie f tale che $f \circ \rho = \sigma$.

  Ricordiamo che ogni riflessione ρ è un'involuzione, cioè è l'inversa di sé stessa ($\rho^2 = \mathbf{1}_V$). Pertanto si ha:

  $f \circ \rho = \sigma \Rightarrow f \circ \rho \circ \rho = \sigma \circ \rho \Rightarrow f \circ \rho^2 = \sigma \circ \rho \Rightarrow f = \sigma \circ \rho.$

  Risulta quindi:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma \circ \rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}) + 3 \\ \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{2}{5} + 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

- Determiniamo le equazioni dell'isometria g tale che $\rho = g \circ \sigma$

  $\rho = g \circ \sigma \Rightarrow \rho \circ \sigma^{-1} = g \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \Rightarrow g = \rho \circ \sigma^{-1}.$

$$\sigma : \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \sigma^{-1} : \begin{cases} x = y' - 1 \\ y = -x' + 3 \end{cases}$$

  Si ha allora:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \circ \sigma^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} y-1 \\ -x+3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}(y-1) + \frac{4}{5}(-x+3) + \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5}(y-1) - \frac{3}{5}(-x+3) - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

Per determinare che tipo di isometrie sono f e g ricorriamo al "Teorema di Chasles" (Proposizione 21.3, Sernesi "Geometria 1"):

Un'isometria del piano euclideo $\mathbb{E}$, che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione a seconda che sia diretta o inversa
Un'isometria di $\mathbb{E}$, che non fissa alcun punto è una traslazione oppure una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.

- $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}$

  Essendo $\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = -1$, f è un'isometria inversa. Allora f sarà una riflessione se ha almeno un punto fisso, sarà invece una glissoriflessione in caso contrario. Gli eventuali punti fissi di tale isometria sono le soluzioni del sistema lineare:

  $$\begin{cases} x = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{19}{5} \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{7}{5} \end{cases}$$

  Poichè tale sistema è incompatibile, f non ha punti fissi e pertanto è una glissoriflessione.

- $g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{17}{5} \end{pmatrix}$

  Essendo $\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = -1$, g è un'isometria inversa. Allora g sarà una riflessione se ha almeno un punto fisso, sarà invece una glissoriflessione in caso contrario. Gli eventuali punti fissi di tale isometria sono le soluzioni del sistema lineare:

  $$\begin{cases} x = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{11}{5} \\ y = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{17}{5} \end{cases}$$

  Poichè tale sistema è incompatibile, g non ha punti fissi e pertanto è una glissoriflessione.

4. Sia $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ uno spazio affine con riferimento $Oe_1e_2e_3$. Mostrare che una trasformazione affine di $\mathbb{A}$ "manda rette in rette".

   Soluzione:

   Una retta r in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ è ottenuta come intersezione di due piani non paralleli, cioè:

   $$r : \begin{cases} aX + bY + cZ = d \\ a'X + b'Y + c'Z = d' \end{cases} \Leftrightarrow r : \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix} \tag{1}$$

   dove $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ è tale che $\mathrm{rg}B = 2$ (altrimenti le soluzioni del sistema non avrebbero dimensione 1).

   Siano:

   $$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \overrightarrow{c} \tag{2}$$

   con $A \in GL_3(\mathbb{R})$, $\overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$, le equazioni di una generica affinità f in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Per determinare $f(r)$, troviamo le equazioni dell'affinità inversa f^{-1} (f^{-1} è ancora un'affinità in quanto l'insieme delle affinità è un gruppo), che si ottengono ricavando in (2) le espressioni X, Y, Z in funzione di $X', Y'Z'$:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1}\left[\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} - \overrightarrow{c}\right]$$

e sostuiamo queste ultime in (1); otteniamo:

$$f(r) : \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} A^{-1}\left[\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} - \overrightarrow{c}\right] = \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix} \Rightarrow f(r) : \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \overrightarrow{c'}$$

dove $\overrightarrow{c'} = A^{-1}\overrightarrow{c} + \begin{pmatrix} d \\ d' \end{pmatrix}$.

Osserviamo allora che $f(r)$ è ancora una retta di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, in quanto intersezione di due piani non paralleli, essendo

$$\text{rg}\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} A^{-1}\right] = \text{rg}\left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}\right] = 2$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sfruttato la seguente proprietà del rango:
date $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $D \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rg}(CD) = \text{rg}(C)$.

5. (*Simmetria rispetto a un punto*)
Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$). Fissiamo in $\mathbb{A}$ un punto C. Determinare le equazioni dell'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ il punto simmetrico di P rispetto a C, cioè il punto $f(P)$ che soddisfa l'identità vettoriale:

$$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$$

<u>*Soluzione:*</u>

Facciamo innanzitutto vedere che l'isomorfimo φ associato a f è $-\mathbf{1}_V$; infatti, utilizzando l'identità vettoriale $\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP}$, si ha:

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \overrightarrow{f(P)C} + \overrightarrow{Cf(Q)} = -\overrightarrow{Cf(P)} + \overrightarrow{Cf(Q)} = -(-\overrightarrow{CP}) - \overrightarrow{CQ} = -(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ}) = -\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}), \text{ dove } \varphi = -\mathbf{1}_V.$$

Siano ora $P = (x_1, \dots, x_n)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$, $f(P) = (y_1, \dots, y_n)$ e $\{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ una base di V si ha:

$$\overrightarrow{Cf(P)} = -\overrightarrow{CP} \Rightarrow (y_1 - c_1)\overrightarrow{u_1} + \ldots + (y_n - c_n)\overrightarrow{u_n} = -[(x_1 - c_1)\overrightarrow{u_1} + \ldots + (x_n - c_n)\overrightarrow{u_n}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 - c_1 \\ \vdots \\ y_n - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - x_1 \\ \vdots \\ c_n - x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 - x_1 \\ \vdots \\ 2c_n - x_n \end{pmatrix}$$

che rappresentano le equazioni dell'affinità cercata.

6. Classificare le isometrie di una retta euclidea.

<u>*Soluzione:*</u>

Sia $\mathbb{E}^1$ una retta euclidea e sia O_{e_1} un riferimento cartesiano.
Una generica isometria f di $\mathbb{E}^1$ ha equazione:

$$x' = ax + c, \quad a, c \in \mathbb{R}$$

In particolare, essendo f un'isometria, la matrice (a) deve essere ortogonale, cioè deve essere $a = \pm 1$.

- Se $a = 1$ e $c \neq 0$ allora f è un'isometria diretta che non fissa alcun punto, cioè f è una traslazione di vettore c.
  Se $a = 1$ e $c = 0$ allora f è l'identità.
- Sia $a = -1$. I punti fissi di f verificano allora l'equazione $x = -x + c$, da cui otteniamo l'unico punto fisso $x = \frac{c}{2} =: P_0$.
  In tal caso f è quindi un'isometria inversa che fissa il solo punto P_0, cioè la riflessione rispetto al punto P_0.

7. Siano $f = R_{0,\alpha}$ e $g = R_{0,\beta}$ le rotazioni di $\mathbb{E}^2$ di centro $O = (0,0)$ ed angolo rispettivamente α e β.
   Dimostrare che $f \circ g$ è una rotazione di centro O e angolo $\alpha + \beta$.

   Soluzione:

   Scriviamo le equazioni delle rotazioni f e g rispettivamente di angoli α e β:

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g : \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Denotando $\mathbf{x} = (x, y)$ e $\mathbf{x}'' = (x'', y'')$, si ha quindi che $f \circ g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}'')$ ovvero:

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}'') = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & -cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta \\ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta & -sin\alpha sin\beta + cos\alpha cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato le formule di addizione e sottrazione:
   $sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha cos\beta \pm cos\alpha sin\beta$
   $cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sin\alpha sin\beta$

   Abbiamo così ottenuto che $f \circ g$ è una rotazione di centro O e angolo $\alpha + \beta$, ovvero $f \circ g = R_{O,\alpha+\beta}$.

8. Siano r e s due rette incidenti di $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e siano ρ_r e ρ_s le riflessioni di assi rispettivamente la retta r e la retta s.
   (a) Mostrare che la composizione $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro $P_0 = s \cap r$.
   (b) Che relazione c'è tra $\rho_s \circ \rho_r$ e $\rho_r \circ \rho_s$?
   (c) Se r è parallela ad s che tipo di affinità è $\rho_r \circ \rho_s$?

   Soluzione:

   (a) Siano α e β gli angoli che r e s formano rispettivamente con la direzione positiva dell'asse delle x. Allora le riflessioni ρ_r e ρ_s avranno equazioni della forma:

$$\rho_r \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{a}, \quad A = \begin{pmatrix} cos2\alpha & sen2\alpha \\ sen2\alpha & -cos2\alpha \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^2$$

$$\rho_s \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{b}, \quad B = \begin{pmatrix} cos2\beta & sen2\beta \\ sen2\beta & -cos2\beta \end{pmatrix}, \; \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2$$

Pertanto:

$$\rho_r \circ \rho_s \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \rho_r \left(\rho_s \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right) = \rho_r \left(B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{b} \right) = A \left(B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{b} \right) + \overrightarrow{a} =$$
$$= AB \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + A\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = AB \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{c}, \text{ con } \overrightarrow{c} = A\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

Notiamo che $\det(AB) = \det A \cdot \det B = (-1)(-1) = 1$ da cui $\rho_r \circ \rho_s$ è un'isometria diretta.

Inoltre ρ_r e ρ_s fissano rispettivamente tutti i punti della retta r e della retta s; dato quindi $P_0 = r \cap s$ si ha:

$$\rho_r \circ \rho_s(P_0) = \rho_r(\rho_s(P_0)) = \rho_r(P_0) = P_0$$

cioè P_0 è un punto fisso per $\rho_r \circ \rho_s$. Dal teorema di Chasles deduciamo che $\rho_r \circ \rho_s$ è una rotazione di centro P_0. Determiniamo l'angolo di rotazione:

$$AB = \begin{pmatrix} cos2\alpha & sen2\alpha \\ sen2\alpha & -cos2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos2\beta & sen2\beta \\ sen2\beta & -cos2\beta \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} cos2\alpha cos2\beta + sen2\alpha sen2\beta & cos2\alpha sen2\beta - sen2\alpha cos2\beta \\ sen2\alpha cos2\beta - cos2\alpha sen2\beta & sen2\alpha sen2\beta + cos2\alpha cos2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2(\alpha-\beta) & -sen2(\alpha-\beta) \\ sen2(\alpha-\beta) & cos2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

In conclusione $\rho_r \circ \rho_s$ è la rotazione in senso antiorario di angolo $2(\alpha - \beta)$ di centro P_0.

(b) Ricordiamo che ogni riflessione ρ è un'involuzione, cioè è l'inversa di sé stessa ($\rho^2 = \mathbf{1}_V$). Pertanto si ha:

$$(\rho_s \circ \rho_r) \circ (\rho_r \circ \rho_s) = \rho_s \circ \rho_r^2 \circ \rho_s = \rho_s \circ \mathbf{1_V} \circ \rho_s = \rho_s^2 = \mathbf{1_V} \Rightarrow \rho_s \circ \rho_r = (\rho_r \circ \rho_s)^{-1}$$

Infatti, facendo $\rho_s \circ \rho_r$ invece di $\rho_r \circ \rho_s$, otteniamo:

$$\rho_s \circ \rho_r \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = BA \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + B\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = BA \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \overrightarrow{d}, \text{ con } \overrightarrow{d} = B\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \text{ dove:}$$
$$BA = \begin{pmatrix} cos2\beta & sen2\beta \\ sen2\beta & -cos2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos2\alpha & sen2\alpha \\ sen2\alpha & -cos2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2(\beta-\alpha) & sen2(\alpha-\beta) \\ sen2(\beta-\alpha) & cos2(\beta-\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} cos2(\alpha-\beta) & sen2(\alpha-\beta) \\ -sen2(\alpha-\beta) & cos2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}$$

cioè $\rho_s \circ \rho_r$ è la rotazione in senso orario di angolo $2(\alpha - \beta)$ di centro P_0, inversa della rotazione $\rho_r \circ \rho_s$.

(c) Se r è parallela a s allora $\alpha = \beta$. Consideriamo due casi:

- r e s sono distinte. In tal caso $\rho_r \circ \rho_s$ è un'isometria diretta (perchè composizione di due isometrie inverse) che non ha punti fissi; infatti se per assurdo esistesse P_0 tale che $\rho_r \circ \rho_s(P_0) = P_0 \Rightarrow \rho_s(P_0) = \rho_r(P_0)$, ma questo è impossibile se r e s sono parallele e distinte. Dal teorema di Chasles segue che $\rho_r \circ \rho_s$ è una traslazione.
- r e s sono coincidenti. In tal caso $\rho_r \circ \rho_s = \rho_s \circ \rho_s = \rho_s^2 = \mathbf{1}_{\mathbb{A}}$.

9. Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ definito, rispetto a una base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^2$, della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Verificare se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ rispetto a cui:

(a) T è autoaggiunto.

(b) T è unitario.

<u>*Soluzione:*</u>

Denotiamo con $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice di un generico prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$. Essendo C la matrice associata a un prodotto scalare (forma bilineare simmetrica definita positiva), le entrate a, b, c devono soddisfare le seguenti relazioni:

$$a > 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0 \Rightarrow ac > b^2.$$

(a) T è autoaggiunto (simmetrico) $\iff \langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y}) \rangle \; \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t(T(\overrightarrow{x}))\, C\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, T(\overrightarrow{y}) \, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, C\, \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, CA\overrightarrow{y} \, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tAC = CA$.

Risulta:

$${}^tAC = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2b \\ b-c & 2c \end{pmatrix}$$

Quindi T è autoaggiunto $\Leftrightarrow 2b = b - c \Leftrightarrow b = -c \Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -b \end{pmatrix}$, con $\begin{cases} a > 0 \\ ab + b^2 < 0 \end{cases}$

Per ottenere quindi un prodotto scalare rispetto a cui T sia autoaggiunto basta scegliere $-a < b < 0$ (ad esempio $a = 2$ e $b = -1$).

(b) T è unitario $\iff \langle T(\overrightarrow{x}), T(\overrightarrow{y}) \rangle = \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle \; \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \iff {}^t(T(\overrightarrow{x}))\, C\, T(\overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, \overrightarrow{y} \, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x}\, {}^tA\, C\, A\overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x}\, C\, \overrightarrow{y} \, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^tA\, C\, A = C$.

Risulta:

$${}^tA\, C\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + c & 2b - 2c \\ 2b - 2c & 4c \end{pmatrix}$$

Quindi T è autoaggiunto $\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b + c = a \\ 2b - 2c = b \\ 4c = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Ma per $b = 0 = c$ C non è la matrice di un prodotto scalare (perchè tali b e c non verificano la disequazione $ac > b^2$). Ne segue che T non è mai unitario.

10. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale euclideo e sia $T : V \to V$ un operatore autoaggiunto.

(a) Mostrare che $T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ volte}}$ è autoaggiunto $\forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Mostrare che se esiste $n \in \mathbb{N}$ e $\overrightarrow{v} \in V$ tali che $T^n(\overrightarrow{v}) = 0$ allora $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}T$.

<u>*Soluzione:*</u>

Ricordiamo che un operatore $T : V \to V$ è autoaggiunto (simmetrico) $\iff \langle T(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(\overrightarrow{y}) \rangle \; \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$.

(a) Facciamo vedere che $\langle T^n(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y} \rangle = \langle \overrightarrow{x}, T^n(\overrightarrow{y}) \rangle \; \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in V$, sfruttando l'ipotesi che T è autoaggiunto:

$\langle T^n(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}\rangle = \langle T(T^{n-1}(\overrightarrow{x})), \overrightarrow{y}\rangle = \langle T^{n-1}(\overrightarrow{x}), T(\overrightarrow{y})\rangle = \langle T(T^{n-2}(\overrightarrow{x})), T(\overrightarrow{y})\rangle = \langle T^{n-2}(\overrightarrow{x}), T^2(\overrightarrow{y})\rangle = \cdots = \langle T(\overrightarrow{x}), T^{n-1}(\overrightarrow{y})\rangle = \langle \overrightarrow{x}, T(T^{n-1}(\overrightarrow{y}))\rangle = \langle \overrightarrow{x}, T^n(\overrightarrow{y})\rangle$.

(b) L'asserto è banalmente vero per $n = 1$. Dimostriamolo per $n > 1$.

Facciamo dapprima vedere che se $T^n(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow T^{n-1}(\overrightarrow{v}) = 0$, $\forall\, n > 1$.

Se per assurdo fosse $T^{n-1}(\overrightarrow{v}) \neq 0$ si avrebbe:

$0 < \langle T^{n-1}(\overrightarrow{v}), T^{n-1}(\overrightarrow{v})\rangle = \langle T^{n-2}(\overrightarrow{v}), T^n(\overrightarrow{v})\rangle = 0 \Rightarrow 0 < 0$: assurdo, da cui $T^{n-1}(\overrightarrow{v}) = 0$.

Quindi ricorsivamente si avrà:
$T^n(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow T^{n-1}(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow T^{n-2}(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow T^2(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow T(\overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}T$.

11. Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'operatore lineare così definito:

$$\varphi(\overrightarrow{i}) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \qquad \varphi(\overrightarrow{j}) = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}, \qquad \varphi(\overrightarrow{k}) = 2\overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}, \qquad \overrightarrow{l} = -\overrightarrow{k} + 2\overrightarrow{l},$$

dove $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l}\}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard. Verificare che φ è un operatore simmetrico e determinare una base ortonormale di autovettori di φ.

<u>*Soluzione:*</u>

Scriviamo la matrice A che rappresenta φ rispetto alla base canonica $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Essendo A (matrice che rappresenta φ in una base ortonormale) simmetrica, φ è simmetrico. Per il teorema spettrale esiste allora una base ortonormale di autovettori di φ.

Per prima cosa determiniamo gli autovalori di φ e i corrispondenti autospazi.
Il polinomio caratteristico di φ è:

$$P(T) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 22\lambda^2 - 24\lambda + 9 = (\lambda-1)^2(\lambda-3)^2;$$

pertanto φ ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$, ciascuno con molteplicità algebrica 2. Troviamo i relativi autospazi:

- V_1 è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A - \lambda_1 I_4)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_1 = \langle (1,1,0,0), (0,0,1,1)\rangle$

La base scelta per V_1 è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard (altrimenti

una base ortogonale di V_1 poteva essere trovata applicando il procedimento di Gram-Schmidt agli autovettori scelti come base di V_1).
Una base ortonormale per V_1 è quindi data da $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

- V_{-1} é il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A - \lambda_2 I_4)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V_3 = \langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$

La base scelta per V_3 è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.
Una base ortonormale per V_3 è dunque data da $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

Notiamo che, essendo φ simmetrico, gli autovettori che costituiscono l'autospazio V_1 sono ortogonali agli autovettori che costituiscono l'autospazio V_3 (Proposizione 22.5, Sernesi: Geometria 1), cioè $\forall \overrightarrow{v} \in V_1$, $\forall \overrightarrow{w} \in V_3$ si ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Ne segue che $\mathcal{B} = \left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0), (0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di φ.

La matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica è:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Notiamo che P è ortogonale essendo la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali. Pertanto ${}^tP = P^{-1}$.

Quindi rispetto alla base $\mathcal{B}$ la matrice che rappresenta φ è:

$$\mathbf{D} = {}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$