Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di GE210

A.A. 2010-2011 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Simona Dimase e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 2 (7 Ottobre 2010)
Forme bilineari e diagonalizzazione

1. Diagonalizzare le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

(A) Diagonalizziamo F, procedendo con il metodo induttivo.
$\overrightarrow{e_2}$ è un vettore non isotropo essendo tale che $F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) = a_{22} = 1 \neq 0$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = (0, 1, 0)$ costituirà il primo vettore della nostra base diagonalizzante.

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove $\overrightarrow{v_1}^\perp = \{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \}$.

$$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x + y = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y = 0 \}$.

$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) = a_{33} = 2 \neq 0$

Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante (*Nota*: osservate come ciò fosse già chiaro dalla matrice A essendo $a_{22} \neq 0$ e $a_{12} = a_{21} = 0$). Si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \}^\perp$.
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp$.

$\overrightarrow{v_2}^\perp = \{ \overrightarrow{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \}$

$$F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2z = 0$$

Pertanto $\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \}^\perp = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y = 0 \quad \text{e} \quad x + 2z = 0 \}$.

$$\overrightarrow{v_3} = (-2, 6, 1) \in \{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \}^\perp \text{ e } F(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = -38 \neq 0$$

Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\{ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \} = \{ (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-2, 6, 1) \}$ rappresenta una base diagonalizzante.

Sia B la matrice che rappresenta F in questa base. Allora detta P la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha $B = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{pmatrix}$

(B) Osserviamo che $rg(B) = 3 < 4$, per cui la matrice diagonale D congruente a B soddisferà anch'essa la condizione $rg(D) = 3$, essendo il rango della forma bilineare indipendente dalla base. Da ciò segue che la nostra base diagonalizzante sarà costituità esattamente da 3 vettori non isotropi e e da un vettore isotropo.
$\overrightarrow{e_1}$ è un vettore non isotropo essendo tale che $F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = a_{11} = 1 \neq 0$. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, 0, 0)$ costituirà il primo vettore della nostra base diagonalizzante.

Allora $\mathbb{R}^4 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove $\overrightarrow{v_1}^\perp = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \big\}$.

$$F(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$
$$= x + 2y + 3z + 4w = 0$$

Pertanto $\overrightarrow{v_1}^\perp = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y + 3z + 4w = 0 \big\}$.

$\overrightarrow{v_2} = (-2, 1, 0, 0) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -4 \neq 0$

Essendo $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ entrambi non isotropi e ortogonali tra loro, essi risulteranno linearmente indipendenti. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante.
Si avrà:
$\mathbb{R}^4 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$.
Troviamo $\overrightarrow{v_3}$ non insotropo in $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp$.

$\overrightarrow{v_2}^\perp = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \big\}$

$$F(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$
$$= -4y - 5z - 4w = 0$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \big\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y + 3z + 4w = 0 \quad \text{e} \quad -4y - 5z - 4w = 0 \big\} = \big\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | x = \frac{-z-4w}{2} \quad \text{e} \quad y = -w - \frac{5z}{4} \big\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (-2, -5, 4, 0) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = -44 \neq 0$

Essendo $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}$ non isotropi e a due a due ortogonali, essi risulteranno linearmente indipendenti. Si avrà:
$\mathbb{R}^4 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^\perp$.
A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_4} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp \cap \overrightarrow{v_3}^\perp$.

$\overrightarrow{v_3}^\perp = \big\{ \overrightarrow{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | F(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{x}) = 0 \big\}$

$$F(\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{x})=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & -5 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&0&1&4\\3&1&0&7\\4&4&7&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & -11 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=-11z=0$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}^\perp=\big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|x+2y+3z+4w=0,\ -4y-5z-4w=0 \text{ e } -11z=0\big\}=\big\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4|x=-2w,\ y=-w \text{ e } z=0\big\}$.

$\overrightarrow{v_4}=(-2,-1,0,1)\in\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\}^\perp$ e $F(\overrightarrow{v_4},\overrightarrow{v_4})=0$
(*Nota*: $\overrightarrow{v_4}$ è necessariamente isotropo per quanto osservato all'inizio).
Una base diagonalizzante è quindi costituita dai vettori: $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4}\}=$
$=\{(1,0,0,0),(-2,1,0,0),(0,-4,5,-4),(-2,-1,0,1)\}$.

Sia B la matrice che rappresenta F in questa base. Allora detta P la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3},\overrightarrow{v_4}\}$ alla base $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4}\}$:

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&0&-2\\0&1&-4&-1\\0&0&5&0\\0&0&-4&1\end{pmatrix}$$

si ha $B={}^tPAP=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-44&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2. Sia V un K-spazio vettoriale e sia $F:V\times V\to K$ una forma bilineare simmetrica. Siano $v_1,\dots,v_n\in V$ tali che $F(v_i,v_j)=0$, $\forall\, i\neq j$. Sotto quali condizioni possiamo concludere che $v_1,\dots,v_n$ sono linearmente indipendenti?

   Soluzione:

   Basta supporre che i vettori $v_1,\dots,v_n$ siano non isotropi.
   Infatti supponiamo che $a_1v_1+\cdots+a_nv_n=0$ e facciamo vedere che $a_i=0\,\forall i$.

   $\forall\, i$ si ha:
   $0=F(v_i,0)=F(v_i,a_1v_1+\cdots+a_nv_n)=a_1F(v_i,v_1)+\cdots+a_nF(v_i,v_n)=a_iF(v_i,v_i)$ poichè per ipotesi $F(v_i,v_j)=0\,\forall i\neq j\ \Rightarrow a_iF(v_i,v_i)=0$. Essendo v_i non isotropo ($F(v_i,v_i)\neq 0$) ne segue che $a_i=0$.

   Poichè ciò vale per ogni i ne concludiamo che $v_1,\dots,v_n$ sono linearmente indipendenti.

3. Sia V un K-spazio vettoriale e $F:V\times V\to K$ una forma bilineare simmetrica.

   (a) Sia $S\subseteq V$. Dimostrare che $S^\perp$ è un sottspazio vettoriale di V.

   (b) Far vedere che il cono F-isotropo $I_F(V)$ non è in generale un sottospazio vettoriale di V. Tuttavia se $I_F(V)\neq\{0\}$ allora è $I_F(V)$ unione (insiemistica) di sottospazi vettoriali 1-dimensionali.

   Soluzione:

   (a) Verifichiamo che se $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S^\perp$, $k\in K$ allora $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}$, $k\overrightarrow{x}\in S^\perp$:

   - siano $\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\in S^\perp\Rightarrow F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{s})=0=F(\overrightarrow{y},\overrightarrow{s}),\forall\overrightarrow{s}\in S\Rightarrow F(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y},\overrightarrow{s})=F(\overrightarrow{x},\overrightarrow{s})+F(\overrightarrow{y},\overrightarrow{s})=0+0=0,\forall s\in S\Rightarrow\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\in S^\perp$;

- sia $\overrightarrow{x} \in S^{\perp}$ e $k \in K \Rightarrow F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{s}) = 0, \forall \overrightarrow{s} \in S \Rightarrow F(k\overrightarrow{x}, \overrightarrow{s}) = kF(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{s}) = k \cdot 0 = 0, \forall \overrightarrow{s} \in S \Rightarrow k\overrightarrow{x} \in S^{\perp}$.

(b) Sia K un campo con caratteristica diversa da 2 e siano $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in I_F(V)$ tali che $F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0 \Rightarrow F(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) + F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) = F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) + F(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{y}) + 2F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 + 0 + 2F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \notin I_F(V)$.

Tuttavia se $I_F(V) \neq \{0\}$ si ha: $I_F(V) = \bigcup\limits_{\overrightarrow{v} \in I_F(V)} \langle \overrightarrow{v} \rangle$.

Verifichiamo per doppia inclusione:

$\subseteq$: Banale.

$\supseteq$: Se $\overrightarrow{v} \in I_F(V) \Rightarrow F(\lambda\overrightarrow{v}, \lambda\overrightarrow{v}) = \lambda^2 F(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v}) = 0 \Rightarrow \lambda\overrightarrow{v} \in I_F(V) \forall \lambda \in K \Rightarrow \langle \overrightarrow{v} \rangle \subseteq I_F(V)$

4. (a) Sia K un campo e siano $A, B \in M_n(K)$.
Dimostrare che:
$$^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x} B \overrightarrow{y}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n \Leftrightarrow A = B$$

(b) Sia $A \in M_n(K)$ e sia $b : K^n \times K^n \to K$ la forma bilineare definita nel modo seguente: $b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y}$. Dimostrare che
$$b \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow A = {}^tA.$$

<u>*Soluzione:*</u>

(a) $(\Leftarrow)$: Banale

$(\Rightarrow)$: Sia $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e sia$\{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\}$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$.
Poichè vale $^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{x} B \overrightarrow{y}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n$, in particolare si avrà $^t\overrightarrow{e_i} A \overrightarrow{e_j} = {}^t\overrightarrow{e_i} B \overrightarrow{e_j}, \forall i, j \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$.

(b) Si osservi preliminarmente che, essendo $^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} \in K$, risulta:
$$^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t({}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y}) = {}^t\overrightarrow{y}\, {}^tA\, {}^t({}^t\overrightarrow{x}) = {}^t\overrightarrow{y}\, {}^tA \overrightarrow{x}. \tag{1}$$
Si ha quindi:
b è simmetrica $\Leftrightarrow b(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = b(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}), \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{y} A \overrightarrow{x}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n \overset{(1)}{\Leftrightarrow} {}^t\overrightarrow{y} A \overrightarrow{x} = {}^t\overrightarrow{y}\, {}^tA \overrightarrow{x}, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in K^n$, (essendo per quanto osservato all'inizio $^t\overrightarrow{x} A \overrightarrow{y} = {}^t\overrightarrow{y}\, {}^tA \overrightarrow{x}) \overset{(a)}{\Leftrightarrow} {}^tA = A$.

5. Data la forma bilineare $F : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da:
$$F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1y_3 + x_1y_4 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_4y_1 + x_4y_4$$
$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4, \quad \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

(a) Scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(b) Verificare che F è degenere e individuare un vettore non nullo $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^4$ tale che $F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Sia $\overrightarrow{v_0} = (2, 1, 0, 3) \in \mathbb{R}^4$.
Determinare due vettori $\overrightarrow{y'}, \overrightarrow{y''} \in \mathbb{R}^4$ tali che:
$$\overrightarrow{y'} - 2\overrightarrow{y''} = (1, 1, 1, 1), \quad \text{con} \quad \overrightarrow{y'} \parallel \overrightarrow{v_0} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{y''} \perp \overrightarrow{v_0}$$

Soluzione:

(a) Sia $\mathbb{E} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$, la matrice $A = (a_{ij})$ che rappresenta F nella base $\mathbb{E}$ è tale che $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Inoltre, osservando che F simmetrica, si ha $a_{ij} = a_{ji}$. Per cui basterà determinare a_{ij}, $i \leq j$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) = 0 \\ a_{12} = F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}) = 0 \\ a_{13} = F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) = F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) = 1 \\ a_{14} = F(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_4}) = F(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_1}) = 1 \\ a_{22} = F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) = 1 \\ a_{23} = F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) = F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) = 1 \\ a_{24} = F(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_4}) = F(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2}) = 4 \\ a_{33} = F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) = 0 \\ a_{34} = F(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}) = F(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_3}) = 0 \\ a_{44} = F(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_4}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Notiamo che nella matrice A la quarta riga si ottiene sommando la prima e la terza e sottraendo la seconda, per cui A non ha rango massimo e conseguentemente F è degenere.

Per trovare un vettore $\overrightarrow{x_0}$ del tipo richiesto osserviamo che:
$F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \,\forall\, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x_0} A \overrightarrow{y} = 0 \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow {}^t\overrightarrow{x_0} A = 0 \Leftrightarrow {}^t A \overrightarrow{x_0} = 0$

$${}^t A \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo avente ∞^1 soluzioni (in quanto $rg({}^tA) = rg(A) = 3$), tra le quali ad esempio il vettore $(1, -1, 1, -1)$. Posto $\overrightarrow{x_0} = (1, -1, 1, -1)$ si ha quindi $F(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y}) = 0 \;\forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^4$.

(c) Siano $\overrightarrow{y'} = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$ e $\overrightarrow{y''} = (y''_1, y''_2, y''_3, y''_4) \in \mathbb{R}^4$.

- $\overrightarrow{y'} - 2\overrightarrow{y''} = (1,1,1,1) \Rightarrow (y'_1 - 2y''_1, y'_2 - 2y''_2, y'_3 - 2y''_3, y'_4 - 2y''_4) = (1,1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} y'_1 - 2y''_1 = 1 \\ y'_2 - 2y''_2 = 1 \\ y'_3 - 2y''_3 = 1 \\ y'_4 - 2y''_4 = 1 \end{cases}$

- $\overrightarrow{y'} \parallel \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$tale che$\overrightarrow{y'} = \lambda \overrightarrow{v_0} = (2\lambda, \lambda, 0, 3\lambda) \Rightarrow \begin{cases} y'_1 = 2\lambda \\ y'_2 = \lambda \\ y'_3 = 0 \\ y'_4 = 3\lambda \end{cases}$

- $\overrightarrow{y''} \perp \overrightarrow{v_0} \Rightarrow F(\overrightarrow{y''}, \overrightarrow{v_0}) = 0 \Rightarrow F(\overrightarrow{y''}, \overrightarrow{v_0}) = \begin{pmatrix} y''_1 & y''_2 & y''_3 & y''_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} y''_3 + y''_4 & y''_2 + y''_3 & y''_1 + y''_2 & y''_1 + y''_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3y''_1 + y''_2 + 3y''_3 + 5y''_4 = 0$$

Quindi intersecando le condizioni trovate si ottiene il seguente sistema di 9 equazioni in 9 incognite:

$$\begin{cases} y_1' - 2y_1'' = 1 \\ y_2' - 2y_2'' = 1 \\ y_3' - 2y_3'' = 1 \\ y_4' - 2y_4'' = 1 \\ y_1' = 2\lambda \\ y_2' = \lambda \\ y_3' = 0 \\ y_4' = 3\lambda \\ 3y_1'' + y_2'' + 3y_3'' + 5y_4'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = 1 + 2y_1'' \\ y_2' = 1 + 2y_2'' \\ y_3'' = -\frac{1}{2} \\ y_4' = 1 + 2y_4'' \\ 1 + 2y_1'' = 2\lambda \\ 1 + 2y_2'' = \lambda \\ y_3' = 0 \\ 1 + 2y_4'' = 3\lambda \\ 3y_1'' + y_2'' + 3y_3'' + 5y_4'' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = 1 + 2y_1'' \\ y_2' = 1 + 2y_2'' \\ y_3'' = -\frac{1}{2} \\ y_4' = 1 + 2y_4'' \\ y_3'' = \frac{1}{2} \\ y_1'' = \frac{2\lambda-1}{2} \\ y_2'' = \frac{\lambda-1}{2} \\ y_3' = 0 \\ y_4'' = \frac{3\lambda-1}{2} \\ 3(\frac{2\lambda-1}{2}) + \frac{\lambda-1}{2} - \frac{3}{2} + 5(\frac{3\lambda-1}{2}) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \frac{12}{11} \\ y_2' = \frac{6}{11} \\ y_3' = 0 \\ y_4' = \frac{18}{11} \\ y_1'' = \frac{1}{22} \\ y_2'' = -\frac{5}{22} \\ y_3'' = -\frac{1}{2} \\ y_4'' = \frac{7}{22} \\ \lambda = \frac{6}{11} \end{cases}$$

In definitiva si ottiene : $\overrightarrow{y'} = (\frac{12}{11}, \frac{6}{11}, 0, \frac{18}{11})$ e $\overrightarrow{y''} = (\frac{1}{22}, -\frac{5}{22}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{22})$

6. Sia $D : K^2 \times K^2 \to K$ l'applicazione cosí definita:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1, \quad \forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2),\, \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2.$$

(a) Verificare che l'applicazione D (detta applicazione determinante) è una forma bilineare antisimmetrica.

(b) Scrivere la matrice di D rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di K^2.

(c) Calcolare il cono isotropo $I_D(K^2)$.

<u>*Soluzione:*</u>

(a) Verifichiamo che D è lineare in entrambi gli argomenti.

Presi $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in K^2$ e $a, b \in K$ si ha:

$$D(a\mathbf{x} + b\mathbf{x}', \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} ax_1 + bx_1' & ax_2 + bx_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}', \mathbf{y}).$$

dove nel penultimo passaggio è stata sfruttata una delle proprietà dei determinanti [Cfr: Sernesi Vol.I, Cap.I, §6[2]].

Analogamente si verifica che $D(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{y}') = aD(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + bD(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$.
Infine, sempre per le proprietà dei determinanti si ha:

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = -D(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Pertanto D è antisimmetrica.

(b) Risulta:

$$D(\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad D(\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$D(\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad D(\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pertanto in base $\mathbb{E}$, D ha matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (antisimmetrica)

(c) $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in K^2$, si ha:

$$D(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - x_2x_1 = 0 \Rightarrow I_D(K^2) = K^2$$

7. Determinare tutte le forme bilineari simmetriche su $\mathbb{R}^3$ rispetto alle quali la base $\{(1,1,0),(0,-2,1),(1,0,1)\}$ risulti diagonale.

<u>*Soluzione:*</u>

Sia $\mathbf{e} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ la base canonica e sia $\mathbf{b} = \{(1,1,0),(0,-2,1),(1,0,1)\}$.
Siano A e D le matrici che rappresentano rispettivamente la forma bilineare nella base ca-- nonica e nella $\mathbf{b}$.
Se supponiamo che $\mathbf{b}$ sia una base diagonalizzante, allora D deve essere della forma:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Pertanto si ha: $A = {}^t(M_{b,e})DM_{b,e}$ dove $M_{b,e}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathbf{e}$ alla base $\mathbf{b}$.

Determiniamo $M_{b,e}$.
Ricordiamo che $M_{b,e} = (M_{e,b})^{-1}$, ovvero:

$$M_{b,e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi:

$$A = {}^t(M_{b,e})DM_{b,e} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4a+b+c & -2a-b-c & -4a-b-2c \\ -2a-b-c & a+b+c & 2a+b+2c \\ -4a-b-2c & 2a+b+2c & 4a+b+4c \end{pmatrix}$$

da cui le forme bilineari cercate sono del tipo:

$$F(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a+b+c & -2a-b-c & -4a-b-2c \\ -2a-b-c & a+b+c & 2a+b+2c \\ -4a-b-2c & 2a+b+2c & 4a+b+4c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$