

Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

TUTORATO NUMERO 6 (14 DICEMBRE 2009)
CONICHE E PROIETTIVITÀ

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
<http://www.lifedreamers.it/liuck>

1. Sia assegnata in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ la famiglia di coniche

$$C_{\lambda} : \lambda x_0^2 - 2\lambda x_1 x_2 + x_1^2 = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- (a) Verificare che C_{λ} è una conica generale $\Leftrightarrow \lambda \neq 0$.
(b) Determinare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali C_{λ} è una conica generale a punti reali.

2. Siano assegnate in $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ le due coniche

$$C : x^2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad D : x^2 - y^2 = 0.$$

- (a) Indicarne il tipo; determinarne i punti impropri e dire se C e D sono affinementemente equivalenti.
(b) Siano \overline{C} e \overline{D} le proiettificazioni di C e D . Scriverne le equazioni; verificare che \overline{C} e \overline{D} sono proiettivamente equivalenti; determinare le equazioni di una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, tale che $f(\overline{C}) = \overline{D}$.

3. Siano date la conica:

$$C : x^2 + y^2 - 2x + y - 4 = 0 \subseteq \mathbb{R}^2$$

e la retta

$$r : y = 2x - 1.$$

Determinare

- (a) l'equazione della riflessione rispetto alla retta r ;
(b) l'equazione della trasformata di C rispetto a tale riflessione.

(Prova di esonero del 13-01-2009)

4. Data la conica

$$D : 5x^2 - y^2 - 6\sqrt{3}xy - 4x - 4\sqrt{3}y + 4 = 0$$

costruire un'isometria che la porti ad avere gli assi coincidenti con gli assi coordinati x e y .

(Prova di esonero del 13-01-2009)

5. Dato il fascio di coniche

$$\Gamma_t : 5x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 2y + 2tx - ty + 2t + 1 = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

determinare:

- (a) di quale tipo di coniche si tratta;
- (b) per quali valori di t si hanno coniche degeneri;
- (c) la forma canonica D affinementemente equivalente alla conica corrispondente al valore $t = 0$ (Γ_0).

6. Si considerino i punti del piano proiettivo reale $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ di coordinate

$$P_1 = [1, 0, 0], P_2 = [0, 1, 0], P_3 = [1, 0, 1], P_4 = [0, 3, 1], P_5 = [2, 1, 1]$$

- (a) determinare l'equazione della conica proiettiva C passante per P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ;
- (b) determinare la forma canonica D proiettivamente equivalente a C e le equazioni di una proiettività f di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ tale che $f(C) = D$.

(Prova di esonero del 13-01-2009)

7. Sia C una conica affine di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ verificante le seguenti condizioni:

- (a) C è semplicemente degenere;
- (b) C passa per i punti $A = (1, -2)$ e $B = (3, 0)$;
- (c) la proiettificazione \overline{C} passa per i punti $Q_1 = [0, 2, 1]$ e $Q_2 = [0, 1, -1]$.
 - (i) Dimostrare che esistono due sole coniche verificanti le condizioni assegnate e indicarne il tipo;
 - (ii) scrivere le equazioni di tali coniche;
 - (iii) determinarne il centro (o il vertice se si tratta di parabole).