Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra

Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Soluzioni Tutorato numero 6 (14 Dicembre 2009)
Coniche e Proiettività

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. (a) La matrice associata alla conica C_λ è:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta: C_λ è una conica generale $\Leftrightarrow \det(A_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$.

(b) Poniamo $\lambda \neq 0$.
Per determinarne i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali C_λ è una conica generale a punti reali studiamo la segnatura di A_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$; infatti, in caso di segnatura $(1,2)$ o $(2,1)$ A_λ sarà una conica a punti reali, altrimenti se la segnatura è $(3,0)$ o $(0,3)$ sarà una conica a punti non reali.

Procediamo pertanto alla diagonalizzazione di A_λ, applicando alla forma bilineare b (avente matrice A_λ) il metodo induttivo, in modo da ottenere una base b-diagonalizzante.

$\overrightarrow{e_3}$ è un vettore non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_3}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1} \rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^\perp$, dove

$$\overrightarrow{v_1}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -\lambda y + z = 0 \}$$

$\overrightarrow{v_2} = (1,0,0) \in \overrightarrow{v_1}^\perp$ e $b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = \lambda \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_2}$ è non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \overrightarrow{v_1}^\perp \cap \overrightarrow{v_2}^\perp$.

$$\overrightarrow{v_2}^\perp = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0 \}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -\lambda y + z = 0 \quad \text{e} \quad x = 0\big\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (0, 1, \lambda) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^\perp$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = -\lambda^2 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_3}$ è non isotropo. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per b.

Sia

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base canonica; in base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare b ha matrice diagonale B_λ (congruente ad A_λ):

$$B_\lambda = {}^tPA_\lambda P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Si osserva subito che B_λ ha segnatura $(1, 2)$ oppure $(2, 1)$. Infatti gli elementi 1 e $-\lambda^2$ hanno sempre segno discorde. Conseguentemente anche A_λ ha segnatura $(1, 2)$ oppure $(2, 1)$; pertanto per ogni $\lambda \neq 0$, C_λ è sempre una conica generale a punti reali.

2. (a) C e D hanno rispettivamente matrici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$rg(A) = rg(B) = 2, \quad \det(A_{00}) = 0 \quad \text{e} \quad \det(B_{00}) = -1 < 0.$

Pertanto C è una parabola semplicemente degenere, mentre D è un'iperbole semplicemente degenere. Ne segue che le due coniche non sono affinemente equivalenti.

C è unione delle due rette parallele:

$$x - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x + 1 = 0$$

D è unione delle due rette incidenti:

$$x - y = 0 \quad \text{e} \quad x + y = 0$$

C ha un unico punto improprio: $[0, 0, 1]$.
D ha due punti impropri: $[0, 1, -1]$ e $[0, 1, 1]$.

(b) Le chiusure proiettive $\overline{C}$ e $\overline{D}$ hanno rispettivamente equazione:

$$-x_0^2 + x_1^2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

$\overline{C}$ e $\overline{D}$ sono entrambe coniche (proiettive) semplicemente degeneri spezzate. Pertanto sono proiettivamente equivalenti.
Per ottenere una proiettività f tale che $f(\overline{C}) = \overline{D}$, basta determinare una matrice $M \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che

$${}^tMAM = \alpha B \,(\text{con}\, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Confrontando A con B, si osserva subito che scambiando la terza riga con la prima, A si trasforma in B. Si pone allora

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si verifica subito che ${}^tMAM = B$.

La proiettività f richiesta ha quindi equazioni:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \alpha M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{cioè} \begin{cases} x_0' = \alpha x_2 \\ x_1' = \alpha x_1 \\ x_2' = \alpha x_0 \end{cases} \text{con} \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

3. (a) Per prima cosa determiniamo le equazioni della riflessione ρ_r rispetto alla retta r:

Data l'equazione generale di una riflessione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

imponiamo la condizione che, presi due punti qualsiasi di r, essi siano fissati da ρ_r.
$P(0,-1)$ e $Q(1,1) \in r$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -b + p \\ -1 = a + q \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b + p \\ 1 = b - a + q \end{cases}$$

I parametri a, b, p, q dell'equazione generale sono pertanto determinati dal seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = -b + p \\ -1 = a + q \\ 1 = a + b + p \\ 1 = b - a + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = p \\ a = -q - 1 \\ 1 = -q - 1 + p + p \\ 1 = p + q + 1 + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = p \\ a = -q - 1 \\ q = 2p - 2 \\ 0 = p + 4p - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{5} \\ a = -\frac{3}{5} \\ q = -\frac{2}{5} \\ p = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della riflessione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(b) Per determinare l'equazione di $\rho_r(C)$, basta trovare le espressioni di x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' e sostituirle nell'equazione della conica C. Per far ciò dobbiamo trovare la trasformazione inversa di ρ_r; ma ricordando che $\rho_r^{-1} = \rho_r$ si ha che le equazioni di ρ_r^{-1} sono le stesse di ρ_r, cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5} \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{2}{5} \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di $C : x^2 + y^2 - 2x + y - 4 = 0$ otteniamo l'equazione della conica $f(C)$ affinemente equivalente a C tramite l'affinità ρ_r:

$0 = \left[-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{2}{5}\right]^2 - 2(-\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5}) + \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{2}{5} - 4 =$

$= \frac{9}{25}(x')^2 + \frac{16}{25}(y')^2 + \frac{16}{25} - \frac{24}{25}x'y' - \frac{24}{25}x' + \frac{32}{25}y' + \frac{16}{25}(x')^2 + \frac{9}{25}(y')^2 + \frac{4}{25} + \frac{24}{25}x'y' - \frac{16}{25}x' - \frac{12}{25}y' + \frac{6}{5}x' - \frac{8}{5}y' - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' - \frac{2}{5} - 4 =$

$= (x')^2 + (y')^2 + \frac{10}{25}x' - \frac{5}{25}y' - \frac{130}{25}$

4. La matrice associata alla conica è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2\sqrt{3} \\ -2 & 5 & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 5 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = -256 \neq 0$

$det(A_{00}) = -32 < 0$

Pertanto D è un'iperbole non degenere.

Ricordiamo che :
- una conica ha gli assi paralleli agli assi coordinati se e solo se nella sua equazione non compare il termine misto $2a_{12}xy$;
- una conica ha centro di simmetria nell'origine se e solo se nella sua equazione non compaiono i termini $2a_{01}x$ e $2a_{02}y$.

Nel nostro caso richiediamo un'isometria che trasformi la conica data D

in una conica D' che abbia assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati x e y, cioè che abbia gli assi paralleli agli assi coordinati e centro di simmetria nell'orgine.
Pertanto ciò che vogliamo fare è ridurre, mediante isometrie, la conica D a una conica D' nella cui equazione non compaiano nè il termine $2a_{12}xy$, nè i termini $2a_{01}x$ e $2a_{02}y$.

Il modo di procedere è pertanto identico a quello di riduzione della conica D alla forma canonica ad essa congruente ($\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$).

Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}. Il polinomio caratteristico di A_{00} è $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 32$. Pertanto A_{00} ha autovalori: $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = 8$. Due autovettori corrispondenti sono: $\overrightarrow{v_1} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $\overrightarrow{v_2} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. Si ha $\|v_1\| = 1$ e $\|v_2\| = 1$. Inoltre essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tali vettori costituiscono una base ortonormale (diagonalizzante).
Sia M la matrice del cambiamento di base dalla base $\{e_1, e_2\}$ alla base $\{v_1, v_2\}$ (M è ortogonale, poichè è la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{e_1, e_2\}$ e nella base $\{v_1, v_2\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f di equazioni: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} \end{cases}$.

Notiamo che f è la rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ (in senso orario) e centro l'origine.

L'isometria f trasforma D nella conica $f(D)$ di equazione:

$$-(x')^2 + 2(y')^2 - 2x' + 1 = 0$$

Allo scopo di eliminare il termine $2a_{01}x'$, applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

$$-(x')^2 + 2(y')^2 - 2x' + 1 = 0 \Rightarrow -[(x')^2 - 2x' + 1] + 2(y')^2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(x' - 1)^2 + 2(y')^2 + 2 = 0$$

Quindi se applichiamo a $f(D)$ la traslazione t:

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' \end{cases}$$

si ottiene la conica $D' = t(f(D))$ di equazione:

$$-(x'')^2 + 2(y'')^2 + 2 = 0$$

avente assi coincidenti con gli assi di simmetria x e y.

Pertanto l'isometria richiesta è la composizione della rotazione f con la traslazione t ($t \circ f$), avente equazioni:

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 1 \\ y'' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{y}{2} \end{cases}$$

5. (a) La matrice associata al fascio di coniche è:

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t+1 & -1+t & -1-\frac{t}{2} \\ -1+t & 5 & -2 \\ -1-\frac{t}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$det(A_t) = -9 + t - \frac{t^2}{4}$

$det(A_{00}) = 1 > 0$

Dal momento che $det(A_{00}) > 0 \, \forall \, t \in \mathbb{R}$, Γ_t è un'ellisse $\forall \, t \in \mathbb{R}$.

(b) Γ_t è una conica degenere $\Leftrightarrow det(A_t) = 0 \Leftrightarrow -9 + t - \frac{t^2}{4} = 0$. Questa equazione di secondo grado ha discriminante negativo, per cui non esistono $t \in \mathbb{R}$ tali che $det(A_t) = 0$. Di conseguenza Γ_t è una conica non degenere $\forall \, t \in \mathbb{R}$.

(c) Per quanto visto nel punto (a), $\Gamma_0 : 5x^2 + y^2 - 4xy - 2x - 2y + 1 = 0$ è un'ellisse non degenere; stabiliamo se si tratta di un'ellisse a punti reali o di un'ellisse a punti non reali.
La matrice associata Γ_0 è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che:

$$D_1 = 1 > 0 \quad , \quad D_2 \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \right) = 4 > 0 \quad , \quad D_3 \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right) = -9 < 0$$

Ne segue che la matrice A non è nè definita positiva (poichè $D_3 < 0$), nè definita negativa (poichè $D_2 > 0$). Pertanto la segnatura di A sarà necessariamente $(2, 1)$ o $(1, 2)$. Di consguenza Γ_0 è un'ellisse a punti reali; pertanto la forma canonica D ad essa affinemente equivalente è:

$$x^2 + y^2 = 1$$

6. (a) L'equazione generale di una conica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{00}x_0^2 = 0$$

Ricaviamo l'equazione della conica proiettiva C cercata, imponendo il passaggio per i punti P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Otteniamo, in questo modo, il seguente sistema nelle incognite $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{01}, a_{02}, a_{00}$:

$$\begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{11} = 0 \\ a_{22} + 2a_{02} + a_{00} = 0 \\ 9a_{11} + 6a_{12} + a_{22} = 0 \\ a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 4a_{01} + 4a_{02} + 4a_{00} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{11} = 0 \\ 2a_{02} = -a_{22} \\ a_{12} = -\frac{1}{6}a_{22} \\ -\frac{1}{3} + a_{22} + 4a_{01} - 2a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{00} = 0 \\ a_{11} = 0 \\ 2a_{02} = -a_{22} \\ a_{12} = -\frac{1}{6}a_{22} \\ a_{01} = \frac{1}{3}a_{22} \end{cases}$$

La conica cercata ha pertano equazione:

$$-\frac{1}{3}a_{22}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \frac{2}{3}a_{22}x_0x_1 - a_{22}x_0x_2 = 0$$

Ricordiamo che l'equazione di una curva algebrica di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ dove F è un polinomio omogeneo di secondo grado di $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]$ definito a meno di un fattore di proporzionalità di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Pertanto nel nostro caso, attribuendo un valore arbitrario ad a_{22}, otteniamo un particolare rappresentante della classe di proporzionalità; quindi, posto ad esempio $a_{22} = 6$ otteniamo che l'equazione della conica richiesta è:

$$-2x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_0x_1 - 6x_0x_2 = 0$$

(b) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che una conica proiettiva è degenere se $det(A) = 0$, non degenere altrimenti; in particolare (nel caso in cui sia degenere) sarà semplicemente degenere se $r(A) = 2$, doppiamente degenere se $r(A) = 1$.
Poichè nel nostro caso $det(A) = -12 \neq 0$ C è non degenere.

Per determinarne la forma canonica rimane da stabilire se si tratta di una conica a punti reali o di una conica a punti non reali; per far ciò determiniamo la segnatura della matrice A: in caso di segnatura $(1, 2)$ o $(2, 1)$ sarà una conica a punti reali, altrimenti se la segnatura è $(3, 0)$ o $(0, 3)$ sarà una conica a punti non reali.

Troviamo la segnatura di A applicando alla forma bilineare b (avente matrice A) il metodo induttivo, in modo da ottenere una base b-diagonalizzante.

$\overrightarrow{e_3}$ è un vettore non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_3}$ costituirà il primo vettore della base nostra diagonalizzante:

Allora $\mathbb{R}^3 = \langle\overrightarrow{v_1}\rangle \oplus \overrightarrow{v_1}^{\perp}$, dove

$$\overrightarrow{v_1}^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -3x - y + 6z = 0\}$$

$\overrightarrow{v_2} = (2,0,1) \in \overrightarrow{v_1}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_2}) = -6 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_2}$ è non isotropo. Pertanto $\overrightarrow{v_2}$ costituirà il secondo vettore della nostra base diagonalizzante e si avrà:
$\mathbb{R}^3 = \langle\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\rangle \oplus \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$

A questo punto rimane da trovare $\overrightarrow{v_3} \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \overrightarrow{v_1}^{\perp} \cap \overrightarrow{v_2}^{\perp}$.

$$\overrightarrow{v_2}^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = y\}$$

Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -3x - y + 6z = 0 \quad \text{e} \quad x = y\}$.

$\overrightarrow{v_3} = (3,3,2) \in \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}^{\perp}$ e $b(\overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_3}) = 12 \neq 0$, cioè $\overrightarrow{v_3}$ è non isotropo. Pertanto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ è una base diagonalizzante per A.

Sia
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ alla base canonica; in base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare b ha matrice diagonale B (congruente ad A):

$$B = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

che ha segnatura $(2,1)$. Anche A avrà dunque segnatura $(2,1)$.

Pertanto la conica C è non degenere a punti reali ed è quindi proiettivamente equivalente alla forma canonica $D: x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

(c) Ricordiamo che una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ è un isomorfismo di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ in se stesso, definita dalle equazioni:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \alpha M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{con}\, M \,\in\, GL_3(\mathbb{R})\,\text{e}\,\alpha \,\in\, \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Pertanto una proiettività che trasformi la conica C nella sua forma canonica D è quella associata a una matrice M tale che $A' = {}^tMAM$, dove

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nel punto (b) abbiamo visto che in base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ la forma bilineare b associata ad A ha matrice $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Allora, se $d_{ii} = b(\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_i})$ è l'elemento i-esimo della diagonale, posto $w_i = \frac{v_i}{\sqrt{|d_{ii}|}}$, $i = 1, 2, 3$, in base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_2}\}$ b ha matrice
$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Pertanto definita M la matrice del cambiamento di base dalla base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_2}\}$ alla base canonica:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

se (x_0, x_1, x_2) e (x'_0, x'_1, x'_2) sono le coordinate rispettivamente nella base canonica e nella base $\{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_2}\}$ si ha: si ha:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha M \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

e di conseguenza le equazioni delle proiettività cercata sono:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \alpha^{-1} M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

7. (i) Le coniche cercate hanno due punti impropri distinti (cioè Q_1 e Q_2): dunque sono necessariamente iperboli. Poichè sono semplicemente degeneri, sono spezzate in due rette r_1, r_2, aventi direzione date dai punti impropri, cioè rispettivamente $r_1 = (2, 1)$ e $r_2 = (1, -1)$.

Poichè il vettore $\overrightarrow{AB} = (2,2)$ non è parallelo né a r_1 né a r_2, allora risulta:

$$A \in r_1 \,\mathrm{e}\, B \in r_2 \,\mathrm{oppure}\, A \in r_2 \,\mathrm{e}\, B \in r_1.$$

In tal modo si ottengono esattamente due coniche:

$$C_1 = \mathcal{S}(A, \langle r_1 \rangle) \cup \mathcal{S}(B, \langle r_2 \rangle) \,\mathrm{e}\, C_2 = \mathcal{S}(A, \langle r_2 \rangle) \cup \mathcal{S}(B, \langle r_1 \rangle)$$

dove $\mathcal{S}(P, \langle v \rangle)$ indica la retta affine passante per P e avente giacitura v.

(ii) Le rette $\mathcal{S}(A, \langle r_1 \rangle)$ e $\mathcal{S}(B, \langle r_2 \rangle)$ hanno rispettivamente equazioni:

$$x - 2y = 5 \,\mathrm{e}\, x + y = 3$$

Le rette $\mathcal{S}(A, \langle r_2 \rangle)$ e $\mathcal{S}(B, \langle r_1 \rangle)$ hanno rispettivamente equazioni:

$$x + y = -1 \,\mathrm{e}\, x - 2y = 3$$

Pertanto C_1 ha equazione

$$(x - 2y - 5)(x + y - 3) = 0,$$

mentre C_2 ha equazione

$$(x + y + 1)(x - 2y - 3) = 0.$$

(iii) Trattandosi di coniche (a centro) degeneri, esse hanno centro nell'intersezione delle due rette componenti.
Pertanto il centro P_1 della conica C_1 è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (\tfrac{11}{3}, -\tfrac{2}{3}).$$

Analogamente il centro P_2 della conica C_2 è ottenuto risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow P_2 = (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}).$$