Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 5 (2 Dicembre 2009)
Coniche

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo: *http://www.lifedreamers.it/liuck*

1. Dato il fascio di coniche in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$:

$$\Gamma_t : x^2 + y^2 - 4txy + 2ty + 1 = 0$$

   (a) Classificare Γ_t al variare del parametro t;

   (b) per i valori di t per cui Γ_t è una conica a centro e a punti reali, determinarne il centro di simmetria;

   (c) per $t = 1$ ridurre Γ_1 alla sua forma canonica D affinemente equivalente e scrivere l'equazione dell'affinità T tale che $T(\Gamma_1) = D$.

   (a) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & -2t \\ t & -2t & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ -2t & 1 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 1 - 5t^2$

$det(A_{00}) = 1 - 4t^2$

Sappiamo che una conica è degenere se $det(A) = 0$, non degenere altrimenti; in particolare (nel caso in cui sia degenere) sarà semplicemente degenere se $r(A) = 2$, doppiamente degenere se $r(A) = 1$.

Nel nostro caso $det(A) = 1 - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. Per questi valori di t la conica è semplicemente degenere poichè in ogni caso il minore $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ e quindi $r(A) \geq 2$.
Inoltre per $t = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ si ha $det(A_{00}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \geq 0$, cioè $\Gamma_{\pm\frac{\sqrt{5}}{5}}$ è un'ellisse semplicemente degenere.

Analizziamo ora il segno di $det(A_{00})$. Sappiamo che se $det(A_{00}) \neq 0$ la conica è a centro e sarà un'iperbole nel caso in cui $det(A_{00}) < 0$ e un'ellisse nel caso in cui $det(A_{00}) > 0$; altrimenti, se $det(A_{00}) = 0$, la conica è una parabola.

Nel nostro caso:

$$det(A_{00}) = 1-4t^2 \Rightarrow \begin{cases} 1-4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2} & \text{PARABOLA} \\ 1-4t^2 < 0 \Leftrightarrow t < -\frac{1}{2} \vee t > \frac{1}{2} & \text{IPERBOLE} \\ 1-4t^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} & \text{ELLISSE} \end{cases}$$

Rimane da stabilire per quali $t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si hanno ellissi a punti reali e per quali ellissi a punti non reali.
Sappiamo che ciò che differenzia un'ellisse a punti reali da un'ellisse a punti non reali nella matrice A è la segnatura; in particolare una conica sarà un'ellisse a punti reali se, oltre alla condizione $det(A_{00}) > 0$, la segnatura della sua matrice associata è $(1,2)$ o $(2,1)$, sarà invece un'ellisse a punti non reali se la segnatura della sua matrice associata è $(3,0)$ o $(0,3)$.
Ricordiamo che per determinare la segnatura (p,q) di una una matrice, basta studiare il segno degli autovalori dell'operatore associato ad essa: p sarà dunque dato dal numero di autovalori positivi e q dal numero di autovalori negativi.

Consideriamo il polinomio caratteristico di A:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & t \\ 0 & 1-\lambda & -2t \\ t & -2t & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2t \\ -2t & 1-\lambda \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ t & -2t \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4t^2] - t^2(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 5t^2] =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 5t^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1,\ 1 \pm \sqrt{5}|t|$$

Pertanto gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{5}|t|$, $\lambda_3 = 1 - \sqrt{5}|t|$. Ne segue che $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$; si avrà quindi segnatura $(2,1)$ quando $\lambda_3 < 0$, cioè per $t \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \infty\right)$, e segnatura $(3,0)$ quando $\lambda_3 > 0$, cioè per $t \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.
Intersecando con i valori di t per cui la conica Γ_t è un'ellisse, si ottiene che Γ_t è un'ellisse a punti reali per $t \in \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}\right)$, mentre è un'ellisse a punti non reali per $t \in \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

(b) In generale se

$$\Gamma :\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

è l'equazione di una conica a centro a punti reali e pertanto con matrice associata:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

tale che $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, le coordinate (u,v) del centro di simmetria soddisfano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_{01} + a_{11}u + a_{12}v = 0 \\ a_{02} + a_{12}u + a_{22}v = 0 \end{cases}$$

le quali, come si può notare, hanno per coefficienti la seconda e la terza riga della matrice A.

Nel nostro caso Γ_t è una conica a centro a punti reali per $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$. Per questi valori di t le coordinate (u, v) del centro di simmetria sono le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} u - 2tv = 0 \\ t - 2tu + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2tv \\ t - 4t^2v + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2tv \\ v = \frac{t}{4t^2-1} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{2t^2}{4t^2-1} \\ v = \frac{t}{4t^2-1} \end{cases}$$

(c) Per quanto visto nel punto (a), $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 4xy + 2y + 1 = 0$ è un'iperbole non degenere; pertanto la forma canonica D ad essa affinemente equivalente è:

$$X^2 - Y^2 = 1$$

Per "trasformare" Γ_1 in D abbiamo a disposizione una successione finita di trasformazioni affini. Procediamo per vari passi:

- **Passo 1: Eliminazione del termine misto** $2a_{12}xy$

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -2t \\ -2t & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo A_{00} simmetrica, è possibile trovare una matrice $M \in GL_2(K)$ tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.

Diagonalizziamo A_{00}:
$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

Gli autospazi corrispondenti sono $V_3 = \langle(1, -1)\rangle$ e e $V_{-1} = \langle(1, 1)\rangle$; pertanto $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ sono due autovettori relativi rispettivamente a λ_1 e λ_2.

La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{e_1, e_2\}$ alla base $\{v_1, v_2\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{e_1, e_2\}$ e nella base $\{v_1, v_2\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità T_1 di equazioni:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

Per trovare l'equazione della conica $\Gamma_1' = T_1(\Gamma_1)$ affinemente equivalente a Γ_1 tramite l'affinità T_1 sostituiamo nell'equazione di $\Gamma_1 : x^2 + y^2 - 4xy + 2y + 1 = 0$, al posto della x e della y, le nuove espressioni in funzione di x' e y' date da T_1:

$(x' + y')^2 + (-x' + y')^2 - 4(x' + y')(-x' + y') + 2(-x' + y') + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_1' : 6(x')^2 - 2(y')^2 - 2x' + 2y' + 1 = 0$

- **Passo 2: Eliminazione dei termini di primo grado**

A partire dall'equazione di Γ_1', applichiamo il metodo del raccoglimento dei quadrati:

$6(x')^2 - 2(y')^2 - 2x' + 2y' + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x')^2 - 2x' + \frac{1}{6} - 2(y')^2 + 2y' - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6((x')^2 - \frac{1}{3}x' + \frac{1}{36}) - 2((y')^2 - y' + \frac{1}{4}) + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x' - \frac{1}{6})^2 - 2(y' - \frac{1}{2})^2 + \frac{4}{3} = 0$

Quindi se applichiamo a Γ_1' la traslazione T_2:

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{1}{6} \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

si ottiene la conica $\Gamma_1'' = T_2(\Gamma_1')$ affinemente equivalente a Γ_1 di equazione:

$$\Gamma_1'' : 6(x'')^2 - 2(y'')^2 + \frac{4}{3} = 0$$

Dividendo per il termine noto, la precedente equazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\Gamma_1'' : \frac{9}{2}(x'')^2 - \frac{3}{2}(y'')^2 + 1 = 0$$

- **Passo 3: Normalizzazione dei coefficienti**

Eseguendo la sostituzione (che corrisponde a un'affinità T_3):

$$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{3}x''' \\ y'' = \sqrt{\frac{2}{3}}y''' \end{cases}$$

si ottiene l'equazione di $\Gamma_1''' = T_3(\Gamma_1'')$:

$$\Gamma_1''' : (x''')^2 - (y''')^2 + 1 = 0$$

Per ottenere l'equazione della forma canonica $D : X^2 - Y^2 = 1$ affinemente equivalente a Γ_1 rimane un'ultima trasformazione (T_4) da applicare, quella definita dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x''' = Y \\ y''' = X \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>
Nei vari passi abbiamo applicato le affinità sostituendo le espressioni di x e y in funzione delle nuove x' e y' direttamente nell'equazione della conica.
Si poteva invece agire direttamente sulla matrice associata alla conica.
Infatti se f è un'affinità con equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

definendo

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix},$$

le equazioni di f possono essere espresse nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ora se A è la matrice associata a una conica C, l'equazione di quest'ultima può essere espressa nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

Sostituendo la (1) nella (2) otteniamo l'equazione della conica D affinemente equivalente a C tramite f, nelle nuove variabili x', y':

$$^t\left[\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}\right] A\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} {}^t\tilde{M}A\tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

In particolare $B = {}^t\tilde{M}A\tilde{M}$ è la matrice associata a D.

Ricapitolando, nei vari passi abbiamo applicato a Γ_1 le affinità T_1, T_2, T_3, T_4, definite dalle seguenti equazioni:

$$T_1 : \begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases} \qquad T_3 : \begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{3} x''' \\ y'' = \sqrt{\frac{2}{3}} y''' \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} x' = x'' + \frac{1}{6} \\ y' = y'' + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad T_4 : \begin{cases} x''' = Y \\ y''' = X \end{cases}$$

Si ha:

$$D = T_4(\Gamma_1''') = T_4(T_3(\Gamma_1'')) = T_4(T_3(T_2(\Gamma_1'))) = T_4(T_3(T_2(T_1(\Gamma_1)))) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1(\Gamma_1).$$

Sia $T = T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$, allora $D = T(\Gamma_1)$; determiniamo le equazioni di T componendo T_1, T_2, T_3, T_4:

$$\begin{cases} x = x' + y' \\ y = -x' + y' \end{cases} \overset{T_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x = x'' + \frac{1}{6} + y'' + \frac{1}{2} = x'' + y'' + \frac{2}{3} \\ y = -x'' - \frac{1}{6} + y'' + \frac{1}{2} = -x'' + y'' + \frac{1}{3} \end{cases} \overset{T_3}{\Rightarrow}$$

$$\overset{T_3}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3}x''' + \sqrt{\frac{2}{3}}y''' + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3}x''' + \sqrt{\frac{2}{3}}x''' + \frac{1}{3} \end{cases} \overset{T_4}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{3}Y + \sqrt{\frac{2}{3}}X + \frac{2}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{3}Y + \sqrt{\frac{2}{3}}X + \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. (a) La matrice associata alla conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad A_{00} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = -1 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \neq 0$$

$$det(A_{00}) = \frac{1}{4} > 0$$

Pertanto, essendo $det(A) \neq 0$ e $det(A_{00}) > 0$, C è un'ellisse non degenere.

(b)
- **Centro di simmetria**
  Le coordinate (u, v) del centro di simmetria P_0 sono le soluzioni del seguente sistema:

  $$\begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u = 0 \\ -1 + v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

  Pertanto il centro di simmetria è il punto $(2, 1)$.

- **Assi di simmetria**
  Gli assi di simmetria di C sono le rette s e t passanti per il centro di simmetria e aventi direzione data da due autovettori associati agli autovalori di A_{00}.

  $$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\tfrac{1}{4} - \lambda)(1 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{1}{4}, \lambda_2 = 1$$

  Gli autospazi corrispondenti sono $V_{\frac{1}{4}} = \langle(1, 0)\rangle$ e $V_1 = \langle(0, 1)\rangle$; pertanto $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ sono due autovettori relativi

rispettivamente a λ_1 e λ_2.
Le rette s e t hanno allora equazioni:

$$s: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y = 1$$
$$t: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 2$$

Pertanto gli assi sono paralleli all'asse x e all'asse y; questo poteva essere subito notato, senza svolgere calcoli, osservando che nell'equazione di C manca il termine misto $2a_{12}xy$.

- **Vertici**
  I quattro vertici di C, P_1, P_2, P_3 e P_4, sono le intersezioni di C con gli assi di simmetria:

$$\begin{cases} y = 1 \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \frac{1}{4}x^2 + 1 - x - 2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x(\frac{1}{4}x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 = (0,1)\,,\, P_2 = (4,1)$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ \frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 1 + y^2 - 2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow P_3 = (2,0)\,,\, P_4 = (2,2)$$

(c) Per prima cosa determiniamo le equazioni della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro $P = (1,1)$ e angolo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove p e q sono determinati dal sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -1 + p \\ 1 = 1 + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della rotazione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -y + 2 \\ y' = x \end{cases}$$

Se ora T è l'affinità di equazioni $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$ si ha:

$f((x,y)) = T \circ R_{P,\vartheta}((x,y)) = T(R_{P,\vartheta}((x,y))) = T((-y+2,x)) = (-2y+4,3x)$

cioè f ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per determinare l'equazione di $f(C)$, basta trovare le espressioni di x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' e sostituirle nell'equazione della conica C. Per far ciò dobbiamo trovare la trasformazione inversa di f:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' - 4 \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' - 4 \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' + 2 \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di $C : \frac{1}{4}x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$ otteniamo l'equazione dell'ellisse $f(C)$ affinemente equivalente a C tramite l'affinità f:

$$0 = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}y')^2 + (-\frac{1}{2}x' + 2)^2 - \frac{1}{3}y' - 2(-\frac{1}{2}x' + 2) + 1 =$$
$$= \frac{1}{36}(y')^2 + \frac{1}{4}(x')^2 - 2x' + 4 - \frac{1}{3}y' + x' - 4 + 1 =$$
$$= \frac{1}{36}(y')^2 + \frac{1}{4}(x')^2 - x' - \frac{1}{3}y' + 1.$$

Il centro P_0', gli assi s', t' e i vertici P_1', P_2', P_3', P_4' della nuova ellisse $f(C)$ possono essere ricavati come nel punto (b), a partire dall'equazione di $f(C)$, oppure notando che essi sono le immagini rispettivamente del centro, degli assi e dei vertici di C tramite f, che ricordiamo essere definita dalle equazioni: $\begin{cases} x' = -2y + 4 \\ y' = 3x \end{cases}$.

Il centro ha dunque coordinate $P_0' = f(P_0) = f((2, 1)) = (-2+4, 6) = (2, 6)$.

I vertici hanno coordinate:
$P_1' = f(P_1) = f((0, 1)) = (-2 + 4, 0) = (2, 0)$
$P_2' = f(P_2) = f((4, 1)) = (-2 + 4, 3) = (2, 3)$
$P_3' = f(P_3) = f((2, 0)) = (0 + 4, 6) = (4, 6)$
$P_4' = f(P_4) = f((2, 2)) = (-4 + 4, 6) = (0, 6)$

Infine gli assi hanno equazioni:
$s' : -\frac{1}{2}x' + 2 - 1 = 0 \Rightarrow x' = 2$
$t' : \frac{1}{3}y' - 2 = 0 \Rightarrow y' = 6$
Dunque anche gli assi di $f(C)$ sono paralleli agli assi x' e y', mancando nuovamente nell'equazione di $f(C)$ il termine misto $2a_{12}x'y'$.

3. (a) La matrice associata alla conica è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12 & 6\sqrt{3} & -6 \\ 6\sqrt{3} & 7 & -5\sqrt{3} \\ -6 & -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 2304 \neq 0$

$det(A_{00}) = -96 < 0$

Pertanto C è un'iperbole non degenere, congruente alla forma canonica D: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, con $a > 0$, $b > 0$.

(b) Per "trasformare" C nella sua corrispondente forma canonica D abbiamo a disposizione una successione finita di isometrie.

Essendo A_{00} simmetrica, per il teorema spettrale, è possibile trovare una matrice ortogonale M tale ${}^tMA_{00}M$ sia diagonale.
Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}. Il polinomio caratteristico di A_{00} è $P(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda + 8)$. Pertanto A_{00} ha autovalori: $\lambda_1 = 12$ e $\lambda_2 = -8$.
Due autovettori corrispondenti sono: $\overrightarrow{v_1} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ e $\overrightarrow{v_2} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tali vettori costituiscono una base ortonormale (diagonalizzante).
La matrice M cercata è dunque la matrice del cambiamento di base dalla base $\{e_1, e_2\}$ alla base $\{v_1, v_2\}$ (essa è infatti ortonormale, poichè è la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali):

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

e se (x, y) e (x', y') sono le coordinate rispettivamente nella base $\{e_1, e_2\}$ e nella base $\{v_1, v_2\}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In questo modo è definita un'affinità f di equazioni: $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{y}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$.

Notiamo che f è un'isometria diretta con un punto fisso (l'origine), cioè una rotazione. In particolare si può subito osservare che f è una rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ (in senso antiorario) e centro l'origine.

L'isometria f trasforma C nella conica $f(C)$ di equazione:

$$3x^2 - 2y^2 + 6x - 3 = 0$$

Allo scopo di eliminare il termine in x di tale equazione, consideriamo la generica traslazione t di vettore $(\alpha, 0)$: $\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = x' - \alpha \\ y = y' \end{cases} .$$

La conica trasformata $t(f(C)$ ha equazione:

$$3x^2 + 3\alpha^2 - 6\alpha x - 2y^2 + 6x - 6\alpha - 3 = 0$$

Posto $\alpha = 1$, t è una traslazione di vettore $(1, 0)$ e $t(f(C)))$ ha equazione:

$$3x^2 + -2y^2 - 6 = 0\,, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$$

4. (a) La matrice associata alla conica è:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta: $rg(A) = 2$ e $det(A_{00}) = 0$. Ne segue che C è una parabola semplicemente degenere. Procediamo alla diagonalizzazione di A_{00}. Basta considerare la base diagonalizzante (trovata con il metodo metodo induttivo per diagonalizzare le forme bilineari)costituita dai vettori $\overrightarrow{v_1} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, 1)$. Allora definita $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con il cambiamento di coordinate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

C ha equazione

$$(x')^2 + 2(x') = 0$$

Procediamo all'eliminazione del termine di primo grado. Con il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x' = x'' - 1 \\ y' = y'' \end{cases}$$

C ha equazione

$$(x'')^2 - 1 = 0$$

Infine con lo scambio di variabili $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$, (con $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

si ottiene per C l'equazione

$$(y''')^2 - 1 = 0.$$

Da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$ segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = MN \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x''' + y''' - 1 \\ y = x''' \end{cases}$$

Pertanto il riferimento in cui C si scrive in forma canonica è $O'''v_1'''v_2'''$ con $O''' = (-1, 0)$ (basta porre $x''' = 0$ e $y''' = 0$ nel sistema precedente) e:

$$v_1''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Invertendo l'affinità trovata nel punto precedente si ottiene:

$$\begin{cases} x''' = y \\ y''' = x - y + 1 \end{cases}$$

Nel nuovo riferimento affine, C ha equazione $(y''')^2 - 1 = 0$; dunque C si spezza nelle rette $y''' - 1 = 0$ e $y''' + 1 = 0$. Tali rette nel riferimento affine di partenza hanno equazione rispettivamente: $x - y = 0$ e $x - y + 2 = 0$.

Alternativamente si poteva procedere nel modo seguente, direttamente dall'equazione di C:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = (x - y)^2 + 2(x - y) = (x - y)(x - y + 2) = 0$$

e dunque C è unione delle rette $x - y = 0$ e $x - y + 2 = 0$.

5. Per prima cosa determiniamo le equazioni della rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro $P = (1, 1)$ e angolo $\vartheta = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sin\frac{\pi}{4} \\ sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

dove p e q sono determinati dal sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + p \\ 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + q \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della rotazione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Per determinare l'equazione di $f(C)$, basta trovare le espressioni di x, y in funzione delle nuove coordinate x', y' e sostituirle nell'equazione della conica C. Per far ciò dobbiamo trovare la trasformazione inversa di f:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1 \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1 \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione di $C : x^2 - y^2 = 1$ otteniamo l'equazione dell'iperbole $f(C)$ affinemente equivalente a C tramite l'affinità f:

$$0 = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1\right]^2 - \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1\right]^2 - 1 =$$

$= [\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + 3 - 2\sqrt{2} + x'y' - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(x'+y')] - [\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{1}{2}(y')^2 + 1 - x'y' - \sqrt{2}(x'-y')] - 1 =$

$= 2x'y' + 2(\sqrt{2}-1)x' - 2y' + 1 - 2\sqrt{2}$

Il centro e gli asintoti della nuova iperbole:

$$f(C) : 2x'y' - 2x' + 2(\sqrt{2}-1)y' + 1 - 2\sqrt{2} = 0$$

sono le immagini tramite la rotazione f del centro e degli asintoti di C.

C ha centro di simmetria $P_0 = O = (0,0)$ (questo si deduce subito dal fatto che tutti i monomi che compaiono nell'equazione di C hanno grado pari: infatti in tal caso la simmetria T rispetto all'origine $O = (0,0)$ di equazioni $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$ è tale che $T(C) = C$). Pertanto $P_0' = f((0,0)) = (1, 1-\sqrt{2})$.

Determiniamo ora gli asintoti di C.
Ricordiamo che data un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ i suoi asintoti sono le rette $y = \pm\frac{b}{a}$. In generale, se $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0$ è l'equazione generale di un'iperbole, gli asintoti passano per il centro di simmetria e sono paralleli alle rette ottenute uguagliando a 0 la parte di secondo grado dell'equazione che definisce l'iperbole; questo segue dal fatto che gli asintoti hanno la direzione di ciascuno dei due punti impropri dell'iperbole, che si trovano omogeneizzando l'equazione che definisce la conica $(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{01}x_1x_0 + a_{02}x_2x_0 + a_{00}x_0^2 = 0)$ e ponendo $x_0 = 0$.

Nel nostro caso si ha:

$$x^2 - y^2 = 0$$

che fornisce le due rette:

$$s : x = y$$

$$t : x = -y$$

Essendo l'origine $(0, 0)$ il centro di simmetria, s e t sono proprio gli asintoti della nostra iperbole C.

Applicando ad esse la trasformazione f si ottengono gli asintoti s' e t' di $f(C)$:

$s' = f(s) : \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 1 \Rightarrow s' : x' = 1$

$t' = f(t) : \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 1 \Rightarrow \sqrt{2}y' = \sqrt{2} - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow t' : y' = 1 - \sqrt{2}$