Università degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di Geometria 2

A.A. 2009-2010 - Docente: Prof. A. Verra
Tutori: Dott.ssa Paola Stolfi e Annamaria Iezzi

Soluzioni tutorato numero 4 (25 Novembre 2009)
Affinità e Teorema spettrale

I testi e le soluzioni dei tutorati sono disponibili al seguente indirizzo:
http://www.lifedreamers.it/liuck

1. Sia R un punto qualsiasi della retta r. Vogliamo dimostrare che $f(R) = R$. Notiamo che, essendo $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ vettori paralleli, si avrà $\overrightarrow{PR} = c\overrightarrow{PQ}$ con $c \in K$.
Sappiamo inoltre per ipotesi che $f(P) = P$ e $f(Q) = Q$.
Allora dalla definizione di affinità (un'affinità è una corrispondenza biunivoca $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che esista un isomorfismo $\varphi : V \to V$ tale che $\forall P, Q \in \mathbb{A}\ \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ})$) si avrà:

$\overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{f(P)f(R)} = \varphi(\overrightarrow{PR}) = \varphi(c\overrightarrow{PQ}) = c\varphi(\overrightarrow{PQ}) = c\overrightarrow{f(P)f(Q)} = c\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{Pf(R)} = \overrightarrow{PR}$

Ne segue che $f(R) = R$. Infatti essendo $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, $\forall P \in \mathbb{A}$, $\forall v \in V\ \exists!\, Q \in \mathbb{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$

2. (a) L'equazione generale di un'affinità in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ è:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (questa è la condizione affinchè l'operatore φ associato a f, rappresentato dalla matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sia un automorfismo)

Dall'esercizio precedente sappiamo che un'affinità f fissa tutti i punti di una retta $r \Leftrightarrow f$ fissa due punti distinti di r.
Nel nostro caso r ha equazione $x+y = 1$. Pertanto, scelti ad esempio in r i punti $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (0, 1)$, le affinità richieste sono tutte e sole quelle che fissano P_1 e P_2.
Imponiamo allora che $f(P_1) = P_1$ e $f(P_2) = P_2$:

$$f(P_1) = P_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+e = 1 \\ c+f = 0 \end{cases}$$

$$f(P_2) = P_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b+e = 1 \\ d+f = 0 \end{cases}$$

Otteniamo dunque il seguente sistema di 4 equazioni in 6 incognite:

$$\begin{cases} a+e=1 \\ c+f=0 \\ b+e=0 \\ d+f=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1-a \\ c=-f \\ b=-e \\ f=1-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=1-a \\ c=d-1 \\ b=a-1 \\ f=1-d \end{cases}$$

La soluzione generale del sistema è in funzione di due parametri (a e d). Le affinità richieste hanno dunque equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix}$$

con $\begin{vmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow ad-(a-1)(d-1) = a+d-1 \neq 0 \Rightarrow a+d \neq 1$

(b) Imponiamo l'ulteriore condizione $f(P) = Q$:

$$\begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2a-2 \\ d-1+2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=2 \\ +2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi l'unica affinità del tipo richiesto è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) Un'affinità è una traslazione se e solo se il suo isomorfismo associato φ è l'identità. Pertanto, nel nostro caso, risulta:

f è una traslazione $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a-1 \\ d-1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = d = 1.$

Ne segue che l'unica traslazione del tipo richiesto è l'identità in quanto per $a = d = 1$ si ottiene $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

3. (a) L'equazione generale di un'affinità in $\mathbb{A} = \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ è:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$$

- $f(P) = P'$, con $P = (1,2,0)$ e $P' = (2,-1,1)$

$$f((1,2,0)) = (2,-1,1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+k=2 \\ d+2e+l=-1 \\ g+2h+m=1 \end{cases}$$

- $f(Q) = Q'$, con $Q = (1,3,1)$ e $Q' = (3,-1,0)$

  $$f((1,3,1)) = (3,-1,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} +$$
  $$\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c+k=3 \\ d+3e+f+l=-1 \\ g+3h+i+m=0 \end{cases}$$

- $\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}$
  $\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$

  Sappiamo che l'isomorfismo φ associato a f è:

  $$\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  Pertanto le due condizioni si traducono nel modo seguente:

  $$\varphi(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=0 \\ g=1 \end{cases}$$
  $$\varphi(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ e=-1 \\ h=0 \end{cases}$$

Si ottiene dunque il seguente sistema di 12 equazioni in 12 incognite:

$$\begin{cases} a+2b+k=2 \\ d+2e+l=-1 \\ g+2h+m=1 \\ a+3b+c+k=3 \\ d+3e+f+l=-1 \\ g+3h+i+m=0 \\ a=1 \\ d=0 \\ g=1 \\ b=1 \\ e=-1 \\ h=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ l=1 \\ m=0 \\ c=0 \\ f=1 \\ i=-1 \\ a=1 \\ d=0 \\ g=1 \\ b=1 \\ e=-1 \\ h=0 \end{cases}$$

In definitiva l'equazione dell'affinità cercata diventa:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) I punti fissi di f sono i punti (x,y,z) che verificano $f(x,y,z) = (x,y,z)$. Imponendo dunque quest'ultima condizione si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-1 = x \\ -y+z+1 = y \\ x-z = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Pertanto l'unico punto fisso di f è $(2,1,1)$.

4. (a) • **Metodo 1**

L'equazione di una rotazione $R_{O,\vartheta}$ di centro $O = (0,0)$ e angolo ϑ (in senso antiorario) è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ora, se $P = (x_0, y_0)$ è un punto qualsiasi, la rotazione $R_{P,\vartheta}$ di centro P ed angolo ϑ (in senso antiorario) può essere ottenuta nel modo seguente: si trasla dapprima P nell'origine O (traslazione di vettore $\overrightarrow{PO}$), si effettua la rotazione di centro O e angolo ϑ (in senso antiorario) e infine si trasla O in P (traslazione di vettore $\overrightarrow{OP}$). Questo formalmente equivale alla seguente composizione:

$R_{P,\vartheta} = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}$, dove $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$.

Posto dunque $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$R_{P,\vartheta}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}} \circ R_{O,\vartheta} \circ t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}))) = t_{\mathbf{c}}(R_{O,\vartheta}(\mathbf{x} - \mathbf{c})) = t_{\mathbf{c}}(A(\mathbf{x}-\mathbf{c})) = A(\mathbf{x}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$.

Nel nostro caso $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pertanto si ottiene che $R_{P,\vartheta}$ ha equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- **Metodo 2**

  L' equazione di una rotazione $R_{P,\vartheta}$ di angolo ϑ (in senso antiorario) e di centro $P(x_0, y_0)$ qualsiasi è della forma:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  Per determinare i parametri p e q si impone la condizione che P sia un punto fisso (in quanto ogni rotazione lascia invariato il suo centro). In tal modo l'equazione risulta determinata in modo univoco.

  Nel nostro caso avremo:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

  dove p e q sono determinati dal sistema:

  $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + p \\ 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + q \end{cases} \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ q = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

  Pertanto l'equazione della rotazione richiesta è:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(b)

- **Metodo 1** Le equazioni di una riflessione ρ_s, dove s è una retta passante per l'origine $O = (0, 0)$ e formante un angolo ϑ con la direzione positiva dell'asse delle x è data da:

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2\vartheta & sin2\vartheta \\ sin2\vartheta & -cos2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

  Se ϑ non è noto, a partire dall'equazione della retta s (che sarà del tipo $y = mx \Rightarrow m = tg\vartheta$), $cos2\vartheta$ e $sin2\vartheta$ possono essere ricavati nel modo seguente:

$cos\vartheta = \dfrac{1-tg^2\frac{\vartheta}{2}}{1+tg^2\frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow cos2\vartheta = \dfrac{1-tg^2\vartheta}{1+tg^2\vartheta} = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$

$sen\vartheta = \dfrac{2tg\frac{\vartheta}{2}}{1+tg^2\frac{\vartheta}{2}} \Rightarrow sen2\vartheta = \dfrac{2tg\vartheta}{1+tg^2\vartheta} = \dfrac{2m}{1+m^2}$

Pertanto le equazioni di una riflessione ρ_s, con $s : y = mx$ è data da:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Se ora $s : y = mx + q$ è una retta qualsiasi, tale che $P = (0, y_0)$ sia il suo punto di intersezione con l'asse y, ρ_s può essere ottenuta nel modo seguente: si trasla dapprima P nell'origine O (traslazione di vettore $\overrightarrow{PO}$) in modo tale che s venga trasformata in una retta s' parallela ad essa e passante per l'origine, si effettua la riflessione rispetto alla retta $s' : y = mx$ e infine si trasla O in P (traslazione di vettore $\overrightarrow{OP}$). Questo formalmente equivale alla seguente composizione:

$\rho_s = t_{\mathbf{c}} \circ \rho_{s'} \circ t_{-\mathbf{c}}$, dove $\mathbf{c} = \overrightarrow{OP}$.

Posto dunque $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$\rho_s(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}} \circ \rho_s \circ t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = t_{\mathbf{c}}(\rho_s(t_{-\mathbf{c}}(\mathbf{x}))) = t_{\mathbf{c}}(\rho_s(\mathbf{x} - \mathbf{c})) = t_{\mathbf{c}}(A(\mathbf{x} - \mathbf{c})) = A(\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c} = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$.

Nel nostro caso, essendo la retta r di equazione $x - y + 1 = 0$, $\mathbf{c} = (0, 1)$ e $m = 1$, cioè $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Pertanto si ottiene che ρ_r ha equazioni:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \end{cases}$

- **Metodo 2** L'equazione generale di una riflessione ρ_r di asse la retta r è:

  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

  Per determinare i parametri a, b, p e q si impone la condizione che i punti di r siano fissati da ρ_r (in quanto ogni riflessione lascia invariati i punti del suo asse). Abbiamo visto nel primo esercizio che un'isometria fissa tutti i punti di una retta $\Leftrightarrow$ fissa due punti distinti di essa. Pentanto è sufficiente imporre la condizione che presi due punti qualsiasi di r, essi sono fissati da ρ_r. In tal modo l'equazione risulta determinata in modo univoco.

Consideriamo il nostro caso.
$P(0,1)$ e $Q(-1,0) \in r$. Per quanto appena visto, possiamo determinare i parametri a, b, p, q dell'equazione generale imponendo che P e Q siano punti fissi per ρ_r:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b + p \\ 1 = -a + q \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -a + p \\ 0 = -b + q \end{cases}$$

Risolviamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = b + p \\ 1 = -a + q \\ -1 = -a + p \\ 0 = -b + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -p \\ a = b - 1 \\ a = -b + 1 \\ b = q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ p = -1 \\ q = 1 \end{cases}$$

Pertanto l'equazione della riflessione richiesta è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $\rho_r \circ \rho_s = R_{P,\vartheta} \Rightarrow \rho_s = \rho_r^{-1} \circ R_{P,\vartheta}$. Poichè risulta $\rho_r^{-1} = \rho_r$ (in quanto $\rho_r \circ \rho_r = id$), allora $\rho_s = \rho_r \circ R_{P,\vartheta}$.

$\rho_s((x,y)) = \rho_r \circ R_{P,\vartheta}((x,y)) = \rho_r(R_{P,\vartheta}((x,y))) = \rho_r(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + \sqrt{3} + 1)$

Risulta quindi che ρ_s ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

Per determinare l'equazione di s ricordiamo che un vettore di direzione $\underline{s}$ di s è un autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$ della matrice $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ di ρ_s; questo è vero perchè se P e Q sono due punti di s ($\Rightarrow \overrightarrow{PQ}$ è un vettore di direzione di s) e f è la riflessione rispetto alla retta s con automorfismo associato φ si ha: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{f(P)f(Q)} = \varphi(\overrightarrow{PQ}) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}$ è un autovettore di φ associato all'autovalore 1.

Il vettore di direzione $\underline{s}$ cercato è quindi una soluzione del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}-1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}-1)x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow$$
$\underline{s} = (1, 2-\sqrt{3})$

Pertanto s è la retta per $P = (1,2)$ con vettore di direzione $\underline{s} = (1, 2-\sqrt{3})$, cioè la retta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 1 & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\sqrt{3})x - y + \sqrt{3} = 0$$

5. (a) Come già visto nell'esercizio precedente, l'equazione di una rotazione f di centro $C = (x_0, y_0)$ e angolo ϑ (in senso antiorario) è data da:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c} - A\mathbf{c}$$

dove $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}$

Nel nostro caso, posto $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{2} & -sin\frac{\pi}{2} \\ sin\frac{\pi}{2} & cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene:

$f((x,y)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-1 \end{pmatrix}$

Per quanto riguarda la riflessione g, notiamo che essa trasforma $P = (x,y)$ in $g(P) = (-x, y)$. Pertanto risulta:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ne segue:

$g \circ f((x,y)) = g(f(x,y)) = g((-y+1, x-1)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix}$

cioè le equazioni di $g \circ f$ sono: $\begin{cases} x' = y-1 \\ y' = x-1 \end{cases}$

(b) Ricordiamo cosa afferma il "'Teorema di Chasles" (Proposizione 21.3, Sernesi "Geometria 1"):
Una isometria del piano euclideo $\mathbb{E}$, che fissa un punto è una rotazione oppure una riflessione a seconda che sia diretta o inversa

Una isometria di $\mathbb{E}$, che non fissa alcun punto è una traslazione oppure una glissoriflessione a seconda che sia diretta o inversa.

$$g \circ f((x,y)) = \begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow g \circ f$ è una isometria inversa. Allora $g \circ f$ è una riflessione se ha almeno un punto fisso ed è una glissoriflessione in caso contrario. Gli eventuali punti fissi di tale isometria sono le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Poichè tale sistema è incompatibile, $g \circ f$ non ha punti fissi e pertanto è una glisoriflessione. (Infatti si può notare che $g \circ f = t_{\mathbf{v}} \circ \rho_r$, dove ρ_r è la riflessione di asse la retta r di equazione x=y e $t_{\mathbf{v}}$ la traslazione di vettore $\mathbf{v} = (-1,-1)$).

6. (a) T_α è unitario $\Longleftrightarrow \langle T_\alpha(\mathbf{u}), T_\alpha(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Longleftrightarrow {}^t(T_\alpha(\mathbf{u}))\, \mathbf{C}\, T_\alpha(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{C}\,\mathbf{v} \,\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{u}\,{}^t\mathbf{A}_\alpha\,\mathbf{C}\,\mathbf{A}_\alpha \mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{C}\,\mathbf{v}\,\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A}_\alpha\,\mathbf{C}\,\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{C}$.

$${}^t\mathbf{A}_\alpha\,\mathbf{C}\,\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & 1-\alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2-2\alpha+1 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) T_α è autoaggiunto (simmetrico) $\Longleftrightarrow \langle T_\alpha(\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T_\alpha(\mathbf{v})\rangle \; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t(T_\alpha(\mathbf{u}))\,\mathbf{C}\,\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{C}\,T_\alpha(\mathbf{v})\,\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{u}\,{}^t\mathbf{A}_\alpha\,\mathbf{C}\,\mathbf{v} = {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{C}\mathbf{A}_\alpha\mathbf{v}\,\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow {}^t\mathbf{A}_\alpha\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{A}_\alpha$.

$${}^t\mathbf{A}_\alpha\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & -\alpha+1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{C}\mathbf{A}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & -1 \\ -\alpha+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha-1 & -\alpha+1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha-1 & -1 \\ -\alpha+1 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \alpha = 2.$$

(c) Per costruire una base ortonormale applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt:
Poniamo $\overrightarrow{f_1} = \overrightarrow{e_1} = (1,0)$

$$\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} - \frac{\left\langle \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{e_2} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1} \right\rangle} \overrightarrow{f_1} = (0,1) + \frac{1}{2}(1,0) = (\frac{1}{2}, 1)$$

Quindi una base ortonormale è $\mathbb{F} = \left\{ (\frac{\overrightarrow{f_1}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\overrightarrow{f_2}) \right\}$.

Sia dunque $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathbb{F}$ alla base canonica, la matrice di T_2 rispetto alla base $\mathbb{F}$ è:

$$D^{-1}\mathbf{A}_2 D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Pertanto T_2, in base $\mathbb{F}$, ha matrice simmetrica.

(d) Poichè T_2 è autoaggiunto, il teorema spettrale grantisce che esiste una base ortonormale che diagonalizzi T_2.
La diagonalizzazione si può ottenere utilizzando indifferentemente sia la base assegnata $\mathbb{E}$ (non ortonormale), sia la base ortonormale $\mathbb{F}$. Noi utilizzeremo la base $\mathbb{E}$.

Il polinomio caratteristico di T_2 è $P(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)$; pertanto T_2 ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, ciascuno con molteplicità algebrica 1. Troviamo i relativi autospazi:

V_1 è il sottospazio generato dall'equazione $x = 0 \Rightarrow V_1 = \langle e_2 \rangle$

V_2 è il sottospazio generato dall'equazione $x - y = 0 \Rightarrow V_2 = \langle e_1 + e_2 \rangle$.

Ricordiamo che dato un operatore simmetrico $T : V \to V$, se λ, μ sono due autovalori distinti di T, ogni autovettore relativo a λ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a μ (Proposizione 22.5, Sernesi: "Geometria 1").
Pertanto la base $\{e_2, e_1 + e_2\}$ è necessariamente ortogonale.

Risulta inoltre:
$\|e_2\| = 1$ e
$\|e_1 + e_2\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1.$

Ne segue dunque che una base ortonormale diagonalizzante per T_2 è $\{e_2, e_1 + e_2\}$.

7. In $\mathbb{R}^4$, dotato di prodotto scalare standard, è assegnato l'operatore lineare T definito, rispetto alla base canonica E di $\mathbb{R}^4$, dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare una base ortonormale F di autovettori di T e scrivere la matrice di T rispetto a tale base.

Per prima cosa troviamo gli autovalori di T e i corrispondenti autospazi. Il polinomio caratteristico di T è $P(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$; pertanto T

ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, ciascuno con molteplicità algebrica 2. Troviamo i relativi autospazi:

- V_1 è il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_1 I_4)\mathbf{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = \langle (1,0,0,0), (0,0,1,1) \rangle$$

La base scelta per V_1 è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard (altrimenti una base ortogonale di V_1 poteva essere trovata applicando il procedimento di Gram-Schmidt agli autovettori scelti come base di V_1).
Una base ortonormale per V_1 è dunque data da $\left\{(1,0,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

- V_{-1} é il sottospazio generato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$(A-\lambda_2 I_4)\mathbf{x} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{-1} = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,-1) \rangle$$

La base scelta per V_{-1} è già ortogonale rispetto al prodotto scalare standard.
Una base ortonormale per V_1 è dunque data da $\left\{(0,1,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$.

Notiamo che, essendo T simmetrico (A è simmetrica), gli autovettori che costituiscono l'autospazio V_1 sono ortogonali agli autovettori che costituiscono l'autospazio V_{-1} (Proposizione 22.5, Sernesi: "Geometria 1"), cioè $\forall \overrightarrow{v} \in V_1$, $\forall \overrightarrow{w} \in V_{-1}$ si ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Ne segue che $b = \left\{(1,0,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (0,1,0,0), (0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ è una base ortonormale di autovettori di T.

La matrice del cambiamento di base dalla base b alla base canonica è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Notiamo che P è ortogonale essendo la matrice del cambiamento di base tra due basi ortonormali. Pertanto ${}^tP = P^{-1}$.

Quindi rispetto alla base B la matrice che rappresenta T è:

$$\mathbf{D} = {}^tPAP = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.