Università degli Studi Roma Tre
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Domini Almost Dedekind

Candidato
Annamaria Iezzi

Relatore
Prof.ssa Stefania Gabelli

Anno Accademico 2011-2012

Classificazione AMS: 13F05, 13F30.
Parole chiave: Domini almost Dedekind, Proprietà ($\sharp$), Fattorizzazione di ideali.

"Padre, se anche tu non fossi il mio
Padre, se anche fossi a me un estraneo,
fra tutti quanti gli uomini già tanto
pel tuo cuore fanciullo t'amerei."

(Camillo Sbarbaro)

Indice

Introduzione

"An integral domain J (with unit) will be said to be almost Dedekind *if, given any maximal ideal P of J, J_P is a Dedekind domain."*

Questa è la definizione con cui Robert Gilmer, nel 1964, apriva l'articolo *"Integral Domains Which are Almost Dedekind"* [8], introducendo, così, nella letteratura matematica, una nuova classe di domini (anelli commutativi unitari integri) che si andasse a interporre, insiemisticamente parlando, tra le già esistenti e studiate classi dei domini di Dedekind e dei domini di Prüfer[1]:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{domini di} \\ \text{Dedekind} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{domini almost} \\ \text{Dedekind} \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{domini di Prüfer} \\ \text{di dimensione uno} \end{array} \right\}.$$

Il nome "*almost Dedekind*" ("quasi Dedekind"), coniato da Gilmer per tali domini, voleva appunto sottolineare il fatto che essi risultavano "particolarmente vicini" ai domini di Dedekind.
La storia dei domini di Dedekind ebbe ufficialmente inizio negli anni '20 del 1900, quando furono introdotti da Emmy Noether (1882-1935), astraendo e generalizzando i risultati riguardanti le proprietà di fattorizzazione degli ideali negli anelli di interi algebrici, che Richard Dedekind (1831-1916) aveva ottenuto nel 1871. Dedekind aveva infatti mostrato che in un anello di interi algebrici ogni ideale proprio non nullo si fattorizza in modo unico nel prodot-

[1] I domini di Prüfer furono introdotti da Heinz Prüfer (1896-1934) nel 1932, il quale, con l'articolo "*Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*" [29], aprì le porte allo studio di quei domini in cui ogni ideale finitamente generato fosse invertibile: tali domini, solo in un secondo momento, presero il nome, in suo onore, di *domini di Prüfer*.

to di ideali primi. Nell'articolo del 1927 "*Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*" [27], Noether mostrò, allora, in via più generale, che la proprietà di fattorizzazione unica in ideali primi per ogni ideale proprio non nullo caratterizza quei domini D che soddisfano i cosiddetti "*Assiomi di Noether*":

(1) ogni ideale di D è finitamente generato (ovvero D è noetheriano),

(2) ogni ideale primo non nullo di D è massimale (ovvero D ha dimensione uno),

(3) D è integralmente chiuso.

Noether denominò appunto un siffato dominio *dominio di Dedekind*.
Un dominio almost Dedekind condivide con un dominio di Dedekind le proprietà di essere integralmente chiuso e di dimensione uno, ma non, in generale, la proprietà di essere noetheriano. Un dominio almost Dedekind non Dedekind è, pertanto, un esempio di dominio localmente, ma non globalmente, noetheriano.
Pare che il primo esempio di dominio almost Dedekind non noetheriano fosse stato ottenuto da Nakano con una costruzione contenuta nel suo articolo "*Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper*" [25] del 1953. In tale articolo Nakano aveva focalizzato la sua attenzione sulle proprietà degli anelli di interi algebrici in estensioni algebriche di grado infinito dei numeri razionali, dimostrando, in particolare, che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ le p-esime radici dell'unità, per ogni primo p, è un dominio almost Dedekind non noetheriano. Infatti, la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$, e più in generale di un dominio di Dedekind, in un'estensione algebrica infinita del suo campo dei quozienti, è in ogni caso un dominio di Prüfer di dimensione uno, ma non necessariamente un dominio di Dedekind; tuttavia si constatò che, sotto ulteriori ipotesi, si poteva sempre ottenere un dominio almost Dedekind. Gran parte dell'interesse maturato dai matematici nella teoria dei domini almost Dedekind, si concentrò allora nel cercare esempi di domini almost Dedekind non banali; le costruzioni interessarono, a parte la teoria degli anelli di interi algebrici, gli ambiti più vari dell'algebra: il gruppo di divisibilità di un dominio, i

domini come intersezioni di valutazioni, l'anello di funzioni di Kronecker, gli anelli di semigruppo.
I domini almost Dedekind hanno avuto grande rilevanza soprattutto nella teoria dei polinomi a valori interi, originariamente introdotta, in due articoli separati del 1919, da Polya e Ostrowski. Dato un dominio D con campo dei quozienti K, l'anello di polinomi a valori interi $Int(D)$ è definito come l'insieme $\{f(X) \in K[X] | f(D) \subseteq D\}$. Con riferimento ai domini almost Dedekind, Chabert dimostrò in [6] che, se $Int(D)$ è un dominio di Prüfer, allora D è un dominio almost Dedekind con tutti i campi residui finiti. Affinché $Int(D)$ sia un Prüfer, la condizione che D sia un dominio almost Dedekind con tutti i campi residui finiti è sufficiente se D noetheriano, ma non lo è nel caso non noetheriano (un controesempio fu fornito da Gilmer in [12]). Il problema venne poi completamente risolto da Loper, il quale, con l'articolo "*A classification of all D such that $Int(D)$ is a Prüfer domain*" [22] del 1998, giunse a una completa caratterizzazione di tutti i domini D tali che $Int(D)$ sia un dominio di Prüfer.

Prendendo spunto dall'articolo "*Almost Dedekind domains which are not Dedekind*" [23], nel quale Loper offre una panoramica della storia dei domini almost Dedekind e di come essi intervengono nei vari ambiti dell'algebra, questo lavoro si prefigge lo scopo di introdurre la classe dei domini almost Dedekind evidenziandone le analogie e le differenze da un lato con i domini di Prüfer, e dall'altro con quelli di Dedekind. Ciò porterà a caratterizzare i domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer e i domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind. Inoltre, sempre in tale ottica, si mostrerà come un dominio almost Dedekind, pur perdendo, in generale, la classica fattorizzazione degli ideali in ideali primi che caratterizza i domini di Dedekind, può presentare, sotto ulteriori ipotesi, differenti tipi di fattorizzazioni che sono generalizzazioni di questa. Si illustreranno, infine, alcune costruzioni di domini almost Dedekind, dando, tra l'altro, esempi concreti di domini almost Dedekind non noetheriani.
Il tema verrà sviluppano in cinque capitoli.

Nel Capitolo 0 vengono richiamati le definizioni e i principali risultati riguardanti la teoria dei domini di Prüfer, dei domini di Dedekind e dei domini di valutazione; ad essi sarà spesso fatto riferimento nel corso della tesi, come conseguenza degli stretti legami che gli almost Dedekind hanno con ognuno di tali domini.

Il Capitolo 1 costituisce una rivisitazione del lavoro di Gilmer in [10, §36] e di Butts e Phillips in [4]. In esso sarà definito un dominio almost Dedekind e ne verranno illustrate le proprietà principali. Sarà interessante notare come alcune di queste proprietà siano anche caratterizzanti: risulta infatti che un dominio D è almost Dedekind se e solo se ogni ideale di D con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale, se e solo se D soddisfa la legge di cancellazione per ideali. Sarà successivamente data una caratterizzazione dei domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer: un dominio di Prüfer è un dominio almost Dedekind se e solo se ha dimensione uno e non contiene ideali massimali idempotenti, se e solo se $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$, per ogni ideale proprio I. Infine si osserverà come il "comportamento" di un dominio almost Dedekind, quando si passa alla chiusura integrale in un'estensione algebrica del suo campo dei quozienti, risulti essere più simile a quello di un Dedekind che a quello di un Prüfer.

Tutto il Capitolo 2, basato sull'articolo di Gilmer "*Overrings of Prüfer domains*" [9], è rivolto allo studio della proprietà ($\sharp$), con particolare riferimento alle conseguenze che essa ha su un dominio di Prüfer. Il risultato più importante, e per cui si lavorerà praticamente in tutta la seconda sezione, mostrerà l'equivalenza della proprietà ($\sharp$) al carattere di finitezza, in un dominio di Prüfer di dimensione uno. Ciò rivelerà, in particolare, come la proprietà ($\sharp$) permetta di "distinguere" un dominio almost Dedekind non noetheriano da un dominio di Dedekind. Il capitolo si conclude con una caratterizzazione abbastanza completa dei domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind.

Il Capitolo 3 offre una panoramica della fattorizzazione degli ideali nei domini almost Dedekind. Costretti a rinunciare, in generale, alla fattorizzazione di ideali in ideali primi tipica dei domini di Dedekind, proporremo tipi di fattorizzazioni di ideali che risultano essere una variazione e una generalizzazione di questa: le modiche riguarderanno da una parte gli ideali che appaiono nella fattorizzazione e dall'altra la classe di ideali da fattorizzare. Con questo intento studieremo la classe degli SP-*domini* e, dopo aver mostrato che un SP-dominio è un dominio almost Dedekind, classificheremo un SP-dominio all'interno della classe dei domini almost Dedekind. Successivamente, ponendo delle restrizioni sul tipo di ideali da fattorizzare, introdurremo i concetti di *primo sharp*, di *grado sharp* di un dominio e di *insieme fattorizzante* ed esamineremo sotto quali ipotesi un dominio almost Dedekind ammette un insieme fattorizzante.

Il Capitolo 4, infine, è completamente dedicato alle costruzioni dei domini almost Dedekind che troviamo nella letteratura matematica, con particolare riferimento al caso non noetheriano, a partire dalla prima costruzione di Nakano nel 1953. La nostra attenzione si rivolgerà soprattutto a quelle costruzioni che riguardano le estensioni infinite e gli anelli di semigruppo, mentre delle altre si daranno solo brevi cenni e riferimenti bibliografici. Inoltre si analizzerà accuratamente un esempio di dominio almost Dedekind non Dedekind proposto da Gilmer in [10, §42].

Capitolo 0

Preliminari

Per chiarezza inserirò in questo capitolo la terminologia, la notazione e le convenzioni che verranno utilizzate all'interno di questa tesi. Si richiameranno, inoltre, alcuni risultati propri dell'algebra commutativa di cui necessiteremo nei prossimi capitoli per una migliore comprensione.

Tutti gli anelli che considereremo nel seguito saranno commutativi unitari. Con il termine *dominio* intenderemo un anello integro.
Dato un dominio D, generalmente indicheremo con K il suo campo dei quozienti; salvo menzione esplicita, si supporrà sempre $D \neq K$. Un *sopra-anello* sarà un qualsiasi dominio compreso tra D e K, mentre un *anello di quozienti* di D sarà un sopra-anello della forma $S^{-1}D$, dove S è una parte moltiplicativa contenuta in $D \setminus \{0\}$. In particolare, se $S = D \setminus P$, dove P è un ideale primo di D, denoteremo con D_P l'anello di quozienti $S^{-1}D$; D_P prende il nome di *localizzazione* di D in P.

Come si vedrà più avanti i domini almost Dedekind costituiscono una classe intermedia tra i domini di Prüfer e i domini di Dedekind. Per questo motivo risulta necessario richiamare alcuni dei risultati classici riguardanti sia la teoria dei domini di Prüfer, sia quella dei domini di Dedekind.

Definizione. Un dominio D è detto *di Prüfer* se D_M è un dominio di valutazione per ogni ideale massimale M di D.

Dalla definizione segue che, essendo i domini di valutazione integralmente chiusi, un dominio di Prüfer è integralmente chiuso.

Una interessante caratterizzazione dei domini di Prüfer riguarda la teoria moltiplicativa degli ideali, come enunciato nel seguente teorema.

Teorema 0.0.1. *Sia D un dominio. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è un dominio di Prüfer.*

(ii) *Ogni ideale non nullo finitamente generato di D è invertibile.*

(iii) *Ogni ideale non nullo finitamente generato A di D soddisfa la legge di cancellazione, ovvero se B e C sono ideali D tali che $AB = AC$, allora $B = C$.*

(iv) *$A(B \cap C) = AB \cap AC$, per ogni A, B, C ideali non nulli di D.*

Dimostrazione. [10, Teorema 22.1], [10, Teorema 24.3], [10, Teorema 25.2]. □

Proposizione 0.0.2. [10, Teorema 25.4] *Sia D un dominio di Prüfer e siano A e B ideali frazionari non nulli di D. Allora, se A e B sono entrambi finitamente generati, $A \cap B$ è finitamente generato.*

Gli ideali primari di un dominio di Prüfer godono di alcune particolari proprietà. Nello specifico, sotto determinate ipotesi, è possibile individuare esattamente l'insieme degli ideali primari.

Teorema 0.0.3. [10, Teorema 23.3] *Sia D un dominio di Prüfer. Sia P un ideale primo di D e sia $\mathcal{S} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme degli ideali P-primari di D.*

(a) *Se Q è P-primario e se $x \in D \setminus P$ allora $Q = Q[Q + (x)]$. Se Q è finitamente generato allora P è massimale in D.*

(b) *$\mathcal{S}$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione. In particolare $\{P^k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$. Se inoltre $P \neq P^2$ allora $\mathcal{S} = \{P^k\}_{k=1}^{\infty}$.*

(c) *$P_0 := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Q_\lambda$ è un ideale primo di D adiacente a P.*

(d) *Se P è idempotente $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k = P$, altrimenti $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k$ è un ideale primo di D adiacente a P.*

Il seguente teorema mostra che un sopra-anello D' di un dominio di Prüfer è un dominio di Prüfer e mette in relazione la struttura di D' con quella di D.

Teorema 0.0.4. [10, Teorema 26.1] *Sia D' un sopra-anello di un dominio di Prüfer D e sia Ω l'insieme degli ideali primi P di D tali che $PD' \subsetneq D'$. Allora:*

(a) *Se M è un ideale primo di D' e se $P = M \cap D$ allora $D_P = D'_M$ e $M = PD_P \cap D'$. Inoltre D' è di Prüfer e, se D ha dimensione finita n, allora la dimensione di D' è minore o uguale a n.*

(b) *Se P è un ideale primo di D, allora $P \in \Omega$ se e solo se $D_P \supseteq D'$. In più $D' = \bigcap_{P \in \Omega} D_P$.*

(c) *Se I' è un ideale di D' e se $I = I' \cap D$ allora $I' = ID'$.*

(d) *$\{PD'\}_{P \in \Omega}$ è l'insieme degli ideali primi di D'.*

Della classe dei domini di Prüfer fanno parte i domini di Dedekind, di cui richiamiamo la definizione data da Emmy Noether.

Definizione. Un dominio D è detto *di Dedekind* se D è noetheriano, integralmente chiuso e di dimensione uno.

Il seguente teorema fornisce una serie di caratterizzazioni dei domini di Dedekind, anche nell'ambito della teoria moltiplicativa degli ideali. Si precisa che con la sigla "DVR" si intende un dominio di valutazione noetheriano.

Teorema 0.0.5. *Le seguenti condizioni sono equivalenti per un dominio D.*

(i) *D è un dominio di Dedekind.*

(ii) *D è un dominio noetheriano e D_M è un DVR per ogni ideale massimale M di D.*

(iii) D_M *è un DVR per ogni ideale massimale* M *di* D *e l'intersezione* $D = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} D_M$ *ha il carattere di finitezza (ovvero ogni elemento non nullo* $x \in D$ *è invertibile in al più un numero finito di* D_M*).*

(iv) D *è un dominio di Prüfer noetheriano.*

(v) Ogni ideale frazionario non nullo di D *è invertibile.*

(vi) Ogni ideale primo non nullo di D *è invertibile.*

(vii) Ogni ideale proprio non nullo di D *è prodotto di un numero finito di ideali primi (univocamente determinati).*

Dimostrazione. [10, Teorema 37.1] e [10, Teorema 37.8]. □

Chiaramente la teoria dei domini di Prüfer e dei domini di Dedekind, si interseca con quella degli anelli di valutazione e dei DVR. Di questi si daranno per buoni la maggior parte dei risultati e delle proprietà. Tuttavia, ritengo utile richiamare alcuni teoremi sulle estensioni di valutazioni, a cui spesso si farà ricorso.

Si richiama che, se $K \subseteq L$ è un ampliamento di campi e V è un anello di valutazione su K, allora un anello di valutazione W su L è un'*estensione* di V a L se $W \cap K = V$.

Teorema 0.0.6. [10, Teorema 19.16] *Sia* $K \subseteq L$ *un ampliamento di campi e sia* W *un anello di valutazione su* L*; sia inoltre* $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *l'insieme degli ideali primi di* W*. Allora:*

(a) $V := W \cap K$ *è un anello di valutazione su* K*.*

(b) Ogni ideale di V *è la contrazione di un ideale di* W*. In particolare,* $\{P_\lambda \cap K\}_{\lambda \in \Lambda}$ *è l'insieme degli ideali primi di* V *(non necessariamente distinti).*

(c) Se W *è un DVR, anche* V *è un DVR.*

(d) Se L *è algebrico su* K *allora gli ideali* $P_\lambda \cap K$ *sono distinti per indici* λ *distinti. Inoltre, se* $[L : K] < \infty$ *e se* V *è un DVR, allora anche* W *è un DVR.*

Teorema 0.0.7. *Sia $K \subseteq L$ un ampliamento algebrico di campi e sia V un anello di valutazione su K. Se V^* è la chiusura integrale di V in L e $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è l'insieme degli ideali massimali di V^*, allora $\{V^*_{M_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ è l'insieme delle estensioni di V a L. In particolare V^* è un dominio di Prüfer. Inoltre se $[L : K] < \infty$, tali estensioni sono in numero finito.*

Dimostrazione. [10, Teorema 20.1], [10, Teorema 20.3]. □

Diamo, infine, qualche breve cenno della teoria della ramificazione di valutazioni, limitandola al caso dei DVR.

Teorema 0.0.8. [32, Pag. 55, Teorema 19] *Sia $K \subseteq L$ un'estensione di campi tale che $[L : K] = n < \infty$. Sia $V := (V, M)$ un DVR su K e siano $W_1 := (W_1, M_1)$, ..., $W_g := (W_g, M_g)$ le estensioni di V a L.*
Sia, per ogni $i = 1, \dots, g$, e_i l'intero positivo, detto indice di ramificazione di W_i rispetto a V, *tale che*

$$MW_i = M_i^{e_i}$$

e f_i l'intero positivo, detto grado relativo di W_i rispetto a V, *definito come segue:*

$$f_i := \left[\frac{W_i}{M_i} : \frac{V}{M}\right].$$

Vale allora la seguente disuguaglianza:

$$e_1 f_1 + e_2 f_2 + \cdots + e_g f_g \leq n.$$

Capitolo 1

Prime proprietà dei domini almost Dedekind

Un dominio D è detto *almost Dedekind* se, dato un qualsiasi ideale massimale M di D, D_M è un dominio di Dedekind.
Questa è la definizione di dominio almost Dedekind introdotta, insieme al termine stesso, da Robert Gilmer nel suo articolo del 1964 *"Integral Domains Which are Almost Dedekind"* [8]. E' subito chiaro l'intento di Gilmer di voler introdurre la nozione di un dominio che fosse di Dedekind localmente, ma non globalmente, in generale. Se, dunque, D è un dominio almost Dedekind, allora D_M è un dominio di Dedekind locale, ovvero un DVR. Viceveversa è chiaro che un DVR è un dominio di Dedekind. Pertanto la definizione precedente risulta equivalente alla seguente, più frequente in letteratura:

Definizione. Un dominio D è detto *almost Dedekind* se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

Osservazioni

1. Un dominio almost Dedekind è un dominio di Prüfer e quindi è integralmente chiuso.

2. Un dominio almost Dedekind ha dimensione uno.

3. Un dominio almost Dedekind D è un dominio di Dedekind se e solo se D è noetheriano o anche se e solo se D ha il carattere di finitezza

(ovvero se ogni elemento non nullo e non invertibile di D appartiene solo a un numero finito di ideali massimali di D); ciò discende direttamente dal Teorema 0.0.5. Una completa caratterizzazione dei domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind sarà data nel Teorema 2.2.6.

4. Un dominio almost Dedekind locale è un DVR.

In un dominio di Dedekind ogni ideale con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale. Il seguente teorema mostra che tale proprietà caratterizza un dominio almost Dedekind.

Teorema 1.0.1. *Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) D è almost Dedekind.

(ii) Ogni ideale di D con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale.

(iii) Ogni ideale primario di D è potenza di un ideale massimale di D.

(iv) D ha dimensione uno e ogni ideale primario di D è una potenza del suo radicale.

Dimostrazione. Nella dimostrazione si farà largo uso del seguente risultato classico dell'algebra commutativa: sia R un anello e sia P un ideale primo di R; allora esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali primari di R_P e gli ideali primari di R contenuti in P.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sia I un ideale di D tale che $\mathrm{rad}(I) = P$ sia un ideale primo non nullo. Poiché D ha dimensione uno, P è massimale e, conseguentemente, I è un ideale primario. Quindi $ID_P \cap D = I$. Ma, essendo D_P un DVR, $ID_P = (PD_P)^n = P^n D_P$, per qualche intero positivo n. Inoltre, poiché P è massimale in D, P^n è P-primario. Ne segue che

$$I = ID_P \cap D = P^n D_P \cap D = P^n,$$

ovvero I è potenza del suo radicale.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: E' sufficiente mostrare che, se ogni ideale di D con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale, allora D ha dimensione uno.

Sia dunque P un ideale primo non nullo di D. Si mostrerà, inizialmente, che P è massimale sotto l'addizionale ipotesi che P è un ideale primo minimale su un ideale principale (p). Se P è minimale su (p), allora

$$\mathrm{rad}(pD_P) \cap D = PD_P \cap D = P,$$

e quindi, per ipotesi, $pD_P \cap D = P^n$, per qualche intero positivo n. Ne segue che

$$pD_P = (pD_P \cap D)D_P = P^n D_P = (PD_P)^n,$$

da cui PD_P è invertibile. Questo implica che $PD_P \supsetneqq (PD_P)^2$ e, conseguentemente, che $P \supsetneqq P^2$. Allora

$$P = PD_P \cap D \supseteq P^2 D_P \cap D = P^{(2)} \supseteq P^2,$$

dove $P^{(2)}$ indica la potenza simbolica di P. Ne segue che $\mathrm{rad}(P^{(2)}) = P$, da cui, per ipotesi, deve essere $P^{(2)} = P$ oppure $P^{(2)} = P^2$; se fosse $P^{(2)} = P$ si avrebbe $P^2 D_P = PD_P$, che non è possibile. Quindi $P^{(2)} = P^2$ e P^2 è P-primario.

Scegliamo $x \in P \setminus P^2$ e sia y un elemento di $D \setminus P$. Allora $P^2 + (xy)$ ha radicale P e conseguentemente, essendo $P^2 \subseteq P^2 + (xy) \subseteq P$, $P^2 + (xy)$ deve essere, per ipotesi, uguale a P o P^2. Si osservi che l'elemento xy non può essere in P^2 dal momento che P^2 è P-primario ($x \notin P^2$ e $y \notin P$). Se ne deduce che $P^2 + (xy) = P$ e $x \in P^2 + (xy)$, vale a dire $x = q + dxy$, con $q \in P^2$ e $d \in D$. Allora, poiché $x(1 - dy) = q \in P^2$ e $x \notin P^2$, si ha $1 - dy \in P$ e $1 \in P + (y)$. Dall'arbitrarietà di y in $D \setminus P$, segue che P è massimale in D.

Nel caso generale, si scelga un elemento p non nullo di P. Allora P contiene un ideale minimale primo P_0 su (p) e, per quanto appena mostrato, P_0 è massimale in D. Quindi $P = P_0$ e P è massimale. Ne concludiamo che D ha dimensione uno.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Chiaramente è sufficiente mostrare che D ha dimensione uno. Sia dunque P un ideale primo di D. Poiché P è primario, esiste un ideale massimale M e un intero positivo n tale che $P = M^n$. Ma allora si ha

$$P = \mathrm{rad}(P) = \mathrm{rad}(M^n) = \mathrm{rad}(M) = M,$$

ovvero P è massimale.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sia M un ideale massimale di D. Innanzitutto, poiché M ha altezza uno, D_M ha dimensione uno. Ne segue che ogni ideale proprio non nullo J di D_M ha per radicale l'ideale massimale MD_M ed è, conseguentemente, MD_M-primario. Allora J è estensione a D_M di un ideale M-primario I di D contenuto in M. Per ipotesi si ha quindi che $I = M^n$, per qualche intero positivo n, da cui $J = M^n D_M$.
Risulta allora che $\{M^n D_M\}_{n=1}^{\infty}$ è l'insieme degli ideali propri non nulli di D_M. Se ne conclude che D_M è un DVR e quindi, dall'arbitrarietà di M, che D è un dominio almost Dedekind.

□

Corollario 1.0.2. *Sia D un dominio almost Dedekind. Se P è un ideale primo di D allora non esistono ideali propriamente contenuti tra P^2 e P.*

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo D_P un DVR, $P^2 \subsetneq P$. Si supponga che esista un ideale I di D tale che $P^2 \subsetneq I \subsetneq P$. Allora $\mathrm{rad}(I) = P$. Inoltre, essendo D di dimensione uno, P è massimale. Se ne deduce che I è primario e conseguentemente, per il Teorema 1.0.1, I è una potenza di P. La conclusione segue dal fatto che non esistono potenze di P strettamente comprese tra P^2 e P. □

Corollario 1.0.3. *Sia D un dominio almost Dedekind. Allora gli ideali primari con radicale un fissato ideale primo di D sono totalmente ordinati per inclusione.*

Dimostrazione. Siano I e J due ideali di D con radicale l'ideale primo P. Per il Teorema 1.0.1, $I = P^n$ e $J = P^m$. Allora, se $n \geq m$ vale che $I \subseteq J$, altrimenti $J \subseteq I$. □

Con il prossimo risultato si caratterizzano i domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer. In particolare, il punto (ii) del teorema seguente mette proprio in evidenza come la classe dei domini almost Dedekind sia intermedia tra quella dei domini di Prüfer e quella dei domini di Dedekind: la proprietà in esso riportata, nel caso dei domini di Prüfer è limitata agli ideali finitamente generati, come evidenziato nel Teorema 0.0.1, mentre nel caso dei domini di Dedekind essa è "ancor più vera" dal momento che in questi ultimi ogni ideale è invertibile.

Teorema 1.0.4. *Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è un dominio almost Dedekind.*

(ii) *Se I, J, H sono ideali non nulli di D tali che $IH = JH$, allora $I = J$, ovvero D soddisfa la legge di cancellazione per ideali.*

(iii) *D è un dominio di Prüfer di dimensione uno che non contiene ideali massimali idempotenti.*

(iv) *D è un dominio di Prüfer tale che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$ per ogni ideale proprio I di D.*

Dimostrazione.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Siano I, J, H ideali di D tali che $IH = JH$ e sia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme degli ideali massimali di D. Per ogni $\lambda \in \Lambda$ si ha:

$$ID_{M_\lambda} HD_{M_\lambda} = (IH)D_{M_\lambda} = (JH)D_{M_\lambda} = JD_{M_\lambda} HD_{M_\lambda}.$$

Per ipotesi D è un dominio almost Dedekind e conseguentemente D_{M_λ} è un DVR per ogni $\lambda \in \Lambda$. Ne segue che HD_{M_λ} è principale e quindi invertibile. Si ottiene dunque $ID_{M_\lambda} = JD_{M_\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Sfruttando a questo punto le proprietà sulle localizzazioni, si ha:

$$I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} ID_{M_\lambda} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} JD_{M_\lambda} = J$$

e questo dimostra il punto (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Per il Teorema 0.0.1 D è di Prüfer. Inoltre, poiché vale la legge di cancellazione, D non può contenere ideali massimali idempotenti. Rimane da far vedere che D ha dimensione uno. Sia P un ideale primo di D e sia $x \in D \setminus P$. Essendo l'ideale P primo, e quindi P-primario, il Teorema 0.0.3 garantisce che $P = P[P + (x)]$, da cui, per la proprietà di cancellazione, $D = P + (x)$. Se ne conclude, per l'arbitrarietà di x in $D \setminus P$, che P è massimale in D e dunque che D ha dimensione uno.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sia I un ideale di D e sia M un ideale massimale che contiene I; allora si ha $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n$. Ne segue che è sufficiente considerare il caso in cui $I = M$ è un ideale massimale di D. Essendo M non idempotente, ovvero $M \neq M^2$, dal Teorema 0.0.3 si ha che $\{M^n\}_{n=1}^{\infty}$ è l'insieme degli ideali M-primari di D. Inoltre, sempre per il Teorema 0.0.3, $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n$ è un ideale primo adiacente a M. Dal fatto che, per ipotesi, D ha dimensione uno, si ottiene che $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = (0)$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Si scelga un ideale massimale M di D; allora, poiché M^n è M-primario, $M^n = M^n D_M \cap D$, per ogni intero positivo n. Ne segue che:

$$(0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n D_M \cap D = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n D_M \right) \cap D.$$

Questo implica che:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (MD_M)^n = (0).$$

Ora, essendo D_M un dominio di valutazione (D è di Prüfer), $\bigcap_{n=1}^{\infty} (MD_M)^n = (0)$ è un primo adiacente a MD_M, da cui D_M ha dimensione uno. Inoltre $MD_M \neq M^2 D_M$. Queste considerazioni mostrano che D_M è un DVR, da cui, per l'arbitrarietà di M, D è almost Dedekind.

□

In analogia con il fatto che ogni sopra-anello di un dominio di Prüfer è un dominio di Prüfer (Teorema 0.0.4), vale il seguente risultato.

Proposizione 1.0.5. *Se D è un dominio almost Dedekind allora ogni sopra-anello di D è almost Dedekind.*

Dimostrazione. Sia D' un sopra-anello di D e sia Q un ideale primo non nullo di D'. Se $P = Q \cap D$ è la contrazione di Q in D, allora P è un ideale primo non nullo e, per ipotesi, D_P è un DVR. Allora si ha

$$D_P \subseteq (D')_Q \subseteq K,$$

dove K è il campo dei quozienti di D. Poiché un DVR è privo di sopra-anelli propri, $(D')_Q = D_P$ è un DVR (questo poteva anche essere subito dedotto dal Teorema 0.0.4) e conseguentemente, per l'arbitrarietà di Q, D' è un dominio almost Dedekind. □

La chiusura integrale di un dominio di Prüfer in una qualsiasi estensione algebrica del suo campo dei quozienti, anche infinita, è ancora un dominio di Prüfer, come asserito dal seguente teorema.

Teorema 1.0.6. *Sia D un dominio di Prüfer con campo dei quozienti K e sia L un'estensione algebrica di K. Allora D^*, la chiusura integrale di D in L, è un dominio di Prüfer.*

Dimostrazione. Sia M un ideale massimale di D^* e sia $P = M \cap D$. Se $S = D \setminus P$, allora $S^{-1}D^*$ è la chiusura integrale in L di $S^{-1}D = D_P$. Essendo D di Prüfer, D_P è un dominio di valutazione e, conseguentemente, $S^{-1}D^*$ è un dominio di Prüfer per il Teorema 0.0.7. Ora, osservando che $M \cap S = \emptyset$, si ha che $S^{-1}M$ è un ideale massimale di $S^{-1}D^*$ e quindi $(S^{-1}D^*)_{S^{-1}M} = {D^*}_M$ è un dominio di valutazione (che estende D_P in L). Se ne conclude che D^* è un dominio di Prüfer. □

In generale, invece, la chiusura integrale di un dominio almost Dedekind in un'estensione algebrica del suo campo dei quozienti non è sempre un dominio almost Dedekind; ad esempio la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo $\mathbb{A}$ dei numeri algebrici è un dominio di Prüfer di dimensione uno in cui tutti gli ideali primi sono idempotenti (vedi Proposizione 4.0.1). Affinchè l'asserto sia vero, bisogna anche supporre che l'estensione sia finita. Vale, infatti, il seguente teorema.

Teorema 1.0.7. *Sia D un dominio integralmente chiuso con campo dei quozienti K; sia L un'estensione algebrica di K e sia D^* la chiusura integrale di D in L.*

(a) Se $[L : K] < \infty$ e se D è almost Dedekind (risp. Dedekind), allora D^* è almost Dedekind (risp. Dedekind).

(b) Se D^* è almost Dedekind (risp. Dedekind) allora D è almost Dedekind (risp. Dedekind).

Prima di dare la dimostrazione del teorema precedente, è necessario richiamare un ulteriore risultato dell'algebra commutativa.

Proposizione 1.0.8. *Sia D un dominio integralmente chiuso con campo dei quozienti K; sia L un'estensione algebrica di K e sia D^* la chiusura integrale di D in L. Se M è un ideale primo di D^* e $P = M \cap D$, allora*

$$D^*{}_M \cap K = D_P.$$

Dimostrazione. E' chiaro che D_P è contenuto in $D^*{}_M \cap K$.
Per ottenere l'inclusione inversa, si osservi per prima cosa che si può assumere che L sia un'estensione normale di K. Infatti, se E è la chiusura normale di L in K, $\overline{D}$ la chiusura integrale di D^* in E e N un ideale primo di $\overline{D}$ che si contrae su M, allora $N \cap D = P$ e $D^*{}_M \subseteq \overline{D}_N \cap L$, da cui $D^*{}_M \cap K \subseteq \overline{D}_N \cap K$. Pertanto se $\overline{D}_N \cap K \subseteq D_P$, vale anche $D^*{}_M \cap K \subseteq D_P$. Sia dunque $\{M_\alpha\}$ l'insieme degli ideali primi di D^* che si contraggono su P. Gli M_α sono coniugati in K, cioè, per ogni α, esiste un automorfismo σ_α di L su K, tale che $\sigma_\alpha(M) = M_\alpha$ [10, Teorema 12.4]. Segue che $\sigma_\alpha(D^*{}_M) = D^*{}_{M_\alpha}$. Quindi

$$D^*{}_M \cap K = D^*{}_{M_\alpha} \cap K = \bigcap_\alpha (D^*{}_{M_\alpha} \cap K). \tag{1.1}$$

Sia $S = D \setminus P$. Allora $S^{-1}D^*$ è intero su $S^{-1}D = D_P$, da cui, essendo D integralmente chiuso e, conseguentemente, $S^{-1}D$ integralmente chiuso, si ha

$$S^{-1}D^* \cap K = S^{-1}D. \tag{1.2}$$

Inoltre, $\{M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali di D^* massimali rispetto alla proprietà di essere disgiunti da S. Quindi $\{S^{-1}M_\alpha\}$ è l'insieme degli ideali massimali di $S^{-1}D^*$. Poiché, dalle proprietà degli anelli di quozienti, per ogni α vale

$$D^*{}_{M_\alpha} = (S^{-1}D^*)_{S^{-1}M_\alpha},$$

si ha:

$$S^{-1}D^* = \bigcap_\alpha (S^{-1}D^*)_{S^{-1}M_\alpha} = \bigcap_\alpha D^*{}_{M_\alpha}. \tag{1.3}$$

Quindi, da (1.1), (1.2) e (1.3), otteniamo:

$$D^*{}_M \cap K = \bigcap_\alpha (D^*{}_{M_\alpha} \cap K) = \left(\bigcap_\alpha D^*{}_{M_\alpha} \right) \cap K = S^{-1}D^* \cap K = S^{-1}D = D_P.$$

□

Dimostrazione del Teorema 1.0.7.

(a) Sia M un ideale massimale di D^*. Allora $P = M \cap D$ è un ideale massimale di D. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.0.6, si ottiene che $D^*{}_M$ è un dominio di valutazione su L che estende D_P. Poiché D è un dominio almost Dedekind, D_P è un DVR. Ma allora, per il Teorema 0.0.6, essendo $[L : K] < \infty$, anche $D^*{}_M$ è un DVR. Segue che D^* è un dominio almost Dedekind.
Si supponga ora che D sia un dominio di Dedekind. Allora, per quanto appena dimostrato, D^* è un dominio almost Dedekind. Per mostrare che D^* è di Dedekind, faremo vedere che ogni elemento non nullo e non invertibile y di D^* appartiene a un numero finito di ideali massimali di D^*. Sia dunque d un elemento non nullo e non invertibile di $yD^* \cap D$. Poiché D è di Dedekind, esiste un numero finito di ideali massimali $P_1, \ldots, P_n$ di D contenenti d. Essendo $[L : K] < \infty$, esiste, per ogni $1 \leq i \leq n$, solo un numero finito di ideali massimali $\{M_{ij}\}_{j=1}^{k_i}$ di D^* che si contraggono su P_i (Teorema 0.0.7). Se M è un ideale massimale di D^* contenente y, allora $M \cap D$ è un ideale massimale di D contenente d. Quindi $M \cap D \in \{P_i\}_{i=1}^n$ e $M \in \{M_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}$.

(b) Sia P un ideale massimale di D. Allora, essendo $D \subseteq D^*$ un'estensione intera, per il teorema del lying over [2, Teorema 5.10], esiste un ideale massimale M di D^* tale che $M \cap D = P$. Essendo D^* almost Dedekind, $D^*{}_M$ è un DVR. Per il Teorema 1.0.8, $D^*{}_M \cap K = D_P$, da cui anche D_P è un DVR per il Teorema 0.0.6. Quindi D è almost Dedekind.
Se ora D^* è un dominio di Dedekind, allora, per quanto appena dimostrato, D è un dominio almost Dedekind. Sia dunque d un elemento non nullo e non invertibile di D e sia P un ideale massimale di D contenente d. Allora P è contrazione di un ideale massimale M di D^*

contenente d. Ma poiché, per ipotesi, D^* è un dominio di Dedekind, esiste solo un numero finito di ideali massimali di D^* contenenti d e, conseguentemente, anche il numero di ideali massimali di D contenenti d sarà finito. Se ne conclude che D è un dominio di Dedekind.

$\square$

Capitolo 2

Proprietà ($\sharp$)

Nel suo articolo *Overrings of Prüfer domains* del 1966 [9], Gilmer introdusse la nozione di proprietà ($\sharp$): un dominio D ha la *proprietà* ($\sharp$) se, per ogni coppia di sottoinsiemi Δ_1 e Δ_2 di $\mathrm{Max}(D)$ che verifichino $\bigcap_{M\in\Delta_1} D_M = \bigcap_{M\in\Delta_2} D_M$, si ha $\Delta_1 = \Delta_2$. Un dominio con la proprietà ($\sharp$) prende il nome di $\sharp$-*dominio*.
Dopo aver dato, nella Sezione 2.1, alcuni risultati preliminari sulla proprietà ($\sharp$), si vedrà, nella Sezione 2.2, che, se D è un dominio di Prüfer di dimensione uno, allora D ha la proprietà ($\sharp$) se e solo se ogni ideale massimale di D è il radicale di un ideale finitamente generato; in particolare, ogni dominio di Dedekind, essendo noetheriano, è uno $\sharp$-dominio. Da tali risultati si evincerà poi facilmente che un dominio almost Dedekind è uno $\sharp$-dominio se e solo se è un dominio di Dedekind. Questo segna una chiara differenza tra i domini di Dedekind e i domini almost Dedekind non noetheriani.

Per snellire la notazione, in questo capitolo Δ denoterà l'insieme degli ideali massimali di D. Inoltre, dato $P \in \Delta$, denoteremo con Δ_P l'insieme $\Delta \setminus \{P\}$.

2.1 Risultati preliminari sulla proprietà ($\sharp$)

Definizione. Sia D un dominio. D gode della *proprietà* ($\sharp$), ovvero D è uno $\sharp$-*dominio*, se per Δ_1 e Δ_2, sottoinsiemi distinti di Δ, vale che

$$\bigcap_{M\in\Delta_1} D_M \neq \bigcap_{M\in\Delta_2} D_M.$$

Un dominio locale è l'esempio più banale di $\sharp$-dominio.

Proposizione 2.1.1. *D ha la proprietà ($\sharp$) se e solo se, per ogni $P \in \Delta$, si ha*

$$\bigcap_{M \in \Delta_P} D_M \nsubseteq D_P.$$

Dimostrazione. Sia D un dominio che goda della proprietà ($\sharp$). Se per assurdo $\bigcap_{M \in \Delta_P} D_M \subseteq D_P$, allora si avrebbe:

$$\bigcap_{M \in \Delta_P} D_M = \left(\bigcap_{M \in \Delta_P} D_M \right) \cap D_P = \bigcap_{M \in \Delta} D_M$$

con $\Delta_P \neq \Delta$, contraddicendo la proprietà ($\sharp$).
Viceversa, consideriamo Δ_1 e Δ_2 sottoinsiemi distinti di Δ; senza perdita di generalità, si può supporre che esista $P \in \Delta_1 \setminus \Delta_2$. Allora

$$D_P \supseteq \bigcap_{M \in \Delta_1} D_M, \text{ ma } D_P \nsupseteq \bigcap_{M \in \Delta_P} D_M \subseteq \bigcap_{M \in \Delta_2} D_M.$$

Conseguentemente $\bigcap_{M \in \Delta_1} D_M \nsupseteq \bigcap_{M \in \Delta_2} D_M$ e quindi, in particolare, $\bigcap_{M \in \Delta_1} D_M \neq \bigcap_{M \in \Delta_2} D_M$. Se ne conclude che D ha la proprietà ($\sharp$). $\square$

Proposizione 2.1.2. *Se, per ogni $P \in \Delta$, $P \nsubseteq \bigcup_{M \in \Delta_P} M$, allora D ha la proprietà ($\sharp$).*

Dimostrazione. Sia $p \in P \setminus \bigcup_{M \in \Delta_P} M$; allora

$$\frac{1}{p} \in \left(\bigcap_{M \in \Delta_P} D_M \right) \setminus D_P.$$

Ne segue che D ha la proprietà ($\sharp$), per la Proposizione 2.1.1. $\square$

Si osservi che, se D ha dimensione uno, la condizione che $P \nsubseteq \bigcup_{M \in \Delta_P} M$ è equivalente al fatto che P sia il radicale di un ideale principale, ovvero alla condizione che esista un ideale P-primario di D che sia principale. Infatti, scegliendo $p \in P \setminus \bigcup_{M \in \Delta_P} M$, si ha che $\mathrm{rad}((p)) = P$ in quanto P è l'unico primo che contiene (p).
Una diretta conseguenza della Proposizione 2.1.2 è il seguente risultato.

Proposizione 2.1.3. *Ogni dominio noetheriano è uno $\sharp$-dominio. In particolare un dominio di Dedekind è uno $\sharp$-dominio.*

Dimostrazione. Sia D un dominio noetheriano. Per la Proposizione 2.1.2 sarà sufficiente mostrare che per ogni $P \in \Delta$, $P \nsubseteq \bigcup_{M \in \Delta_P} M$.
Sia dunque $P = (f_1, \dots, f_n)$ un ideale massimale di D. Supponiamo, per assurdo, che $P \subseteq \bigcup_{M \in \Delta_P} M$. Allora, per ogni i, esiste $M_i \in \Delta_P$ tale che $f_i \in M_i$. Ne segue che $P \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$. Per il "*Prime Avoidance Theorem*" [2, Proposizione 1.11] esiste i tale che $P \subseteq M_i$, da cui, essendo P massimale, deve essere $P = M_i$; ciò rappresenta una contraddizione, poiché $M_i \neq P$. $\square$

Si noti, inoltre, che la Proposizione 2.1.2 non si inverte in generale, ma ciò avviene nel caso in cui D gode della proprietà QR[1], come diretta conseguenza del risultato seguente.

Proposizione 2.1.4. *Sia D un dominio che gode della proprietà QR; se $\{P_\alpha\}$ è un insieme di ideali primi di D e se P è un ideale primo distinto da ogni P_α, allora le affermazioni "$P \subseteq \bigcup P_\alpha$" e "$D_P \supseteq \bigcap D_{P_\alpha}$" sono equivalenti.*

Dimostrazione. Nella dimostrazione della Proposizione 2.1.2 abbiamo mostrato indirettamente che, se $D_P \supseteq \bigcap D_{P_\alpha}$, allora $P \subseteq \bigcup P_\alpha$. Viceversa, supponiamo che $P \subseteq \bigcup P_\alpha$ e poniamo $S = D \setminus \bigcup P_\alpha$; allora, essendo $D_P \supseteq S^{-1}D$, sarà sufficiente mostrare che $S^{-1}D = \bigcap D_{P_\alpha}$. Il contenimento $S^{-1}D \subseteq \bigcap D_{P_\alpha}$ è banale. Viceversa, si osservi innanzitutto, che, essendo $\bigcap D_{P_\alpha}$ un sopra-anello di D, esso è, per ipotesi, un anello di quozienti; sia dunque $x \in D$ tale che $1/x \in \bigcap D_{P_\alpha}$. Allora, per ogni α, $1/x = r_\alpha / y_\alpha$, con $r_\alpha \in D$ e $y_\alpha \notin P_\alpha$. Quindi $y_\alpha = r_\alpha x \notin P_\alpha$ e, conseguentemente, $x \notin P_\alpha$. Dall'arbitrarietà di α, $x \notin \bigcup P_\alpha$, da cui $1/x \in S^{-1}D$. $\square$

Segue allora direttamente dalla proposizione precedente e dalle osservazioni fatte il seguente corollario.

[1] Un dominio D gode della *proprietà* QR se ogni suo sopra-anello è un anello di quozienti di D.

Corollario 2.1.5. *Sia D un dominio uno-dimensionale che gode della proprietà QR. Allora D gode della proprietà $(\sharp)$ se e solo se ogni ideale massimale di D è il radicale di un ideale principale.*

Dal Corollario 2.1.5 si può dedurre, in particolare, che se D è un dominio almost Dedekind che gode della proprietà QR, allora D è uno $\sharp$-dominio se e solo se D è un dominio di Dedekind. Supponiamo, infatti, che D sia un dominio almost Dedekind che abbia la proprietà QR e supponiamo, inoltre, che D goda della proprietà $(\sharp)$. Allora il Corollario 2.1.5 mostra che, se M è un ideale massimale in D, esiste $m \in M$ tale che (m) sia M-primario. Per il Teorema 1.0.1, $(m) = M^k$ per qualche intero positivo k, ovvero M è invertibile. Ciò implica che D è un dominio di Dedekind.
Si mostrerà più avanti, nel Teorema 2.2.6, che tale risultato vale nel caso generale di un qualsiasi dominio almost Dedekind, che non goda necessariamente della proprietà QR.

2.2 Domini di Prüfer e proprietà $(\sharp)$

In questa sezione assumeremo che D sia un dominio di Prüfer, per cui avremo che D_M è un anello di valutazione per ogni ideale massimale M di D. Potremo, pertanto, sempre considerare la valutazione associata a D_M, per ogni ideale massimale M. Il risultato principale è quello enunciato nel Teorema 2.2.6, il quale mostra che se D è un dominio almost Dedekind, allora D gode della proprietà $(\sharp)$ se e solo se D è un dominio di Dedekind.

La seguente proposizione afferma in particolare che un dominio di Prüfer uno-dimensionale con il carattere di finitezza è uno $\sharp$-dominio, e, conseguentemente, ribadisce che ogni dominio di Dedekind è uno $\sharp$-dominio.

Proposizione 2.2.1. *Sia D un dominio di dimensione uno. Una condizione sufficiente affinché D abbia la proprietà $(\sharp)$ è che ogni ideale massimale di D contenga un elemento che sia contenuto solo in un numero finito di ideali massimali di D.*

Dimostrazione. Sia M un ideale massimale di D e sia $\{M_\alpha\} = \Delta \setminus \{M\}$. Sia v la valutazione associata a D_M e v_α la valutazione associata a D_{M_α}. Sia m

un elemento non nullo di M che sia contenuto in un numero finito di ideali massimali di D distinti da M, siano $\{M_i\}_{i=1}^n$. Allora per $t \in (\bigcap_{i=1}^n M_i) \setminus M$ e per un'opportuna scelta di un intero positivo k, si ha $v_\alpha(t^k/m) = kv_\alpha(t) - v_\alpha(m) \geq 0$ per ogni α, mentre $v(t^k/m) = kv(t) - v(m) = -v(m) < 0$. Allora $t^k/m \in (\bigcap D_{M_\alpha}) \setminus D_M$ e, dalla Proposizione 2.1.1, se ne conclude che D ha la proprietà ($\sharp$) come asserito. □

Il nostro intento vuole essere ora quello di mostrare che il carattere di finitezza è anche necessario affinchè un dominio di Prüfer uno-dimensionale abbia la proprietà ($\sharp$). Diamo, a tale scopo, alcuni risultati intermedi.

Lemma 2.2.2. *Sia D un dominio di dimensione uno tale che il radicale di Jacobson di D sia non nullo. Se $\Delta = \{M_\beta\}$ e se $M_\alpha \in \Delta$ è il radicale di un ideale generato da due elementi, allora esiste $m_\alpha \in M_\alpha$ tale che $1 - m_\alpha \in M_\beta$ per ogni $\beta \neq \alpha$.*

Dimostrazione. Sia $x \neq 0$ tale che $x \in \mathrm{Jac}(D) = \bigcap_{M_\beta \in \Delta} M_\beta$. Se v_β è la valutazione associata a D_{M_β}, allora $v_\beta(x) > 0$, per ogni β. Per ipotesi, esistono $t, u \in M_\alpha$ tali che $M_\alpha = \mathrm{rad}((t, u))$. Esiste, allora, un intero n tale che $v_\alpha(t^n) > v_\alpha(x)$, $v_\alpha(u^n) > v_\alpha(x)$. Quindi, posto $B = (t^n, u^n, x)$, si ha $\mathrm{rad}(B) = M_\alpha$ e $v_\alpha(x) \leq v_\alpha(y)$, per ogni $y \in B$. Ora $(x) \subseteq B$ e B è invertibile, in quanto è un ideale finitamente generato in un dominio di Prüfer. Ne segue che B divide (x), cioè $(x) = AB$ per qualche ideale A di D. Si ha allora $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, con $a_i \in A$ e $b_i \in B$ per ogni i, da cui

$$v_\alpha(x) \geq \min_i(v_\alpha(a_i b_i)) = v_\alpha(a_{i_0} b_{i_0}) = v_\alpha(a_{i_0}) + v_\alpha(b_{i_0}) \geq v_\alpha(x);$$

ma $v_\alpha(b_{i_0}) \geq v_\alpha(x)$, per l'osservazione sui valori di v_α sugli elementi di B. Quindi deve essere $v_\alpha(a_{i_0}) = 0$, vale a dire $a_{i_0} \in A \setminus M_\alpha$ e, conseguentemente, $A \nsubseteq M_\alpha$.

Si osservi che per $\beta \neq \alpha$ si ha che $B \nsubseteq M_\beta$, altrimenti si avrebbe $M_\alpha = \mathrm{rad}(B) \subseteq M_\beta$, contraddicendo la massimalità di M_α; esiste quindi $b_\beta \in B \setminus M_\beta$, per ogni β. Mostriamo che questo implica che $A \subseteq \bigcap_{\beta \neq \alpha} M_\beta$; supponiamo infatti che esista $\beta \neq \alpha$ tale che $A \nsubseteq M_\beta$; allora, preso $a_\beta \in A \setminus M_\beta$, si avrebbe $a_\beta b_\beta \in AB = (x) \subseteq M_\beta$ con $a_\beta, b_\beta \notin M_\beta$, contraddicendo la primalità di M_β.

Scegliamo ora $a_\alpha \in A \setminus M_\alpha$. Poiché M_α è massimale si ha $M_\alpha + (a_\alpha) = D$, ovvero $m_\alpha + da_\alpha = 1$, per qualche $m_\alpha \in M_\alpha$, $d \in D$. Quindi, per $\beta \neq \alpha$, $1 - m_\alpha = da_\alpha \in M_\beta$. $\square$

Lemma 2.2.3. *Sia R un anello e sia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ l'insieme degli ideali massimali di R. Se, per ogni $\lambda \in \Lambda$, esiste $m_\lambda \in M_\lambda$ tale che $1 - m_\lambda \in \bigcap_{\mu \neq \lambda} M_\mu$, allora Λ è un insieme finito.*

Dimostrazione. Si supponga che Λ non sia finito. Allora esiste un ordine $<$ di Λ per il quale Λ non possiede elementi massimali. Allora, per $\lambda \in \Lambda$, definiamo

$$A_\lambda = \bigcap_{\beta > \lambda} M_\beta.$$

Per ipotesi, $1 - m_\lambda \in A_\lambda \setminus M_\lambda$ per ogni λ, da cui $A_\lambda \nsubseteq M_\lambda$ per ogni λ. Inoltre $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una catena di ideali propri di R. Allora $A = \bigcup A_\lambda$ è ancora un ideale proprio di R, poiché $1 \notin A_\lambda$ per ogni λ. Ma, per la scelta degli A_λ, A non è contenuto in nessun ideale massimale di R, il che rappresenta una contraddizione. Se ne deduce che Λ è finito come asserito. $\square$

Il seguente teorema fornisce una caratterizzazione dei domini di Prüfer uno-dimensionali che godono della proprietà ($\sharp$). In particolare, esso mostra che, se D è un dominio di Prüfer uno-dimensionale, allora D è uno $\sharp$-dominio se e solo se ogni ideale massimale contiene un ideale finitamente generato che non sia contenuto in altri ideali massimali, se e solo se ogni ideale massimale è il radicale di un ideale finitamente generato.

Teorema 2.2.4. *Se D ha dimensione uno e se $\Delta = \{M_\beta\}$, allora, dato $M_\alpha \in \Delta$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $D_{M_\alpha} \nsupseteq \bigcap_{\beta \neq \alpha} D_{M_\beta}$.

(ii) *M_α è il radicale di un ideale con due generatori.*

(iii) *M_α è il radicale di un ideale finitamente generato.*

Dimostrazione.

$(i) \Rightarrow (ii):$ Sia $\Delta' = \{M_\lambda\} = \Delta \setminus M_\alpha$ e sia v_β la valutazione associata a D_{M_β} per ogni β. Poiché, per ipotesi, $D_{M_\alpha} \not\supseteq \bigcap D_{M_\lambda}$, esiste un elemento $\frac{a}{b}$ tale che $\frac{a}{b} \in D_{M_\lambda}$ per ogni λ e $\frac{a}{b} \notin D_{M_\alpha}$; ne segue che $v_\alpha\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ e $v_\lambda\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$ per ogni λ. Quindi $v_\alpha\left(\frac{b}{a}\right) > 0$, da cui $\frac{b}{a} \in M_\alpha D_{M_\alpha}$. Sia $\frac{b}{a} = \frac{s}{t}$ dove $s \in M_\alpha$ e $t \in D \setminus M_\alpha$. Allora $v_\alpha(t) = 0 < v_\alpha(s)$ e $v_\lambda(t) \geq v_\lambda(s)$ per ogni λ.

Sia ora Ω' l'insieme degli M_λ che contengono s e si ponga $\Omega = \Omega' \cup \{M_\alpha\}$. Chiaramente Ω è l'insieme degli ideali massimali di D contenenti s. Si noti che, se $P \in \Delta$ e se $P \subseteq \bigcup_{T \in \Omega} T$, allora $P \in \Omega$; infatti se per assurdo $P \notin \Omega$, o equivalentemente se $s \notin P$, allora, essendo P massimale, $P + (s) = D$ da cui esistono $p \in P$ e $d \in D$ tali che $p + ds = 1$. Ma allora p non può appartenere a T, per $T \in \Omega$, da cui $p \in P \setminus \left(\bigcup_{T \in \Omega} T\right)$, cioè $P \nsubseteq \bigcup_{T \in \Omega} T$. Questa osservazione mostra che, se $S = D \setminus \left(\bigcup_{T \in \Omega} T\right)$ e se $D' = S^{-1}D$, allora $\{TD'\}_{T \in \Omega}$ è l'insieme degli ideali massimali di D'. Dal Teorema 0.0.4 D' è un dominio di Prüfer di dimensione uno. Inoltre, se $M_\beta \in \Omega$, il fatto che $D_{M_\beta} = D'_{M_\beta D'}$ implica che v_β è la valutazione associata a $D'_{M_\beta D'}$. Per ogni $M_\beta \in \Omega'$ si ha, dunque, $v_\beta(t) \geq v_\beta(s) > 0$, mentre $v_\alpha(s) > v_\alpha(t) = 0$. Quindi $tD' \nsubseteq M_\alpha D'$ e $tD' \subseteq \bigcap_{M_\beta \in \Omega'} M_\beta D'$. Poiché $M_\alpha D'$ è massimale in D', $M_\alpha D' + tD' = D'$ e, conseguentemente, esistono $u \in M_\alpha D'$ e $d' \in D'$ tali che $u + d't = 1$; ciò implica inoltre che $u \notin M_\beta D'$ per ogni $M_\beta \in \Omega'$, ovvero $u \notin \bigcup_{M_\beta \in \Omega'} M_\beta D'$. Possiamo assumere, senza perdità di generalità, che $u \in M_\alpha$. Faremo dunque vedere che $B = (s, u) \subseteq D$ ha radicale M_α. Chiaramente $B \subseteq M_\alpha$. Se $M_\lambda \in \Delta' \setminus \Omega'$, allora $s \notin M_\lambda$, da cui $B \nsubseteq M_\lambda$. Inoltre se $M_\lambda \in \Omega'$, allora $u \notin M_\lambda D'$, da cui $u \notin M_\lambda$, che a sua volta implica $B \nsubseteq M_\lambda$. Quindi, essendo M_α l'unico ideale primo che contiene B, si ha $\mathrm{rad}(B) = M_\alpha$ e la (ii) risulta dimostrata.

$(ii) \Rightarrow (iii):$ Banale.

$(iii) \Rightarrow (ii):$ Si supponga che $M_\alpha = \mathrm{rad}(B)$, dove $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Essendo B finitamente generato e D di Prüfer, B è invertibile, da cui $B \supsetneq BM_\alpha$. Sia $b \in B \setminus BM_\alpha$; allora, $B^{-1}(b) \nsubseteq M_\alpha$. Da questo e dal fatto che M_α è l'unico ideale massimale di D che contiene B, segue che deve essere $B + B^{-1}(b) = D$ e, conseguentemente, $B = B^2 + (b)$. Quindi per ogni

$b_i \in B$ esistono $a_{ij} \in B$ e $r_i \in D$ tali che

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j + r_i b$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) b_j = r_i b.$$

Se $\|\delta_{ij} - a_{ij}\| = u$ è il determinante di questo sistema, dalla regola di Cramer si ha che $ub_j \in (b)$ per ogni j. Ma u è della forma $1 - t$ per qualche $t \in B$, di modo che $b_j - b_j t \in (b)$ per ogni j. Se ne deduce che $B = (t, b)$, da cui la (ii) risulta dimostrata.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Si supponga che $M_\alpha = \mathrm{rad}((a, b))$ e si fissi $x \in M_\alpha$, con $x \neq 0$. Se $\{M_r\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D che contengono x, $S = D \setminus (\bigcup M_r)$ e

$$D' = S^{-1} D,$$

si ottiene, come nella dimostrazione di $(i) \Rightarrow (ii)$, che D' è un dominio di Prüfer uno-dimensionale e $\{M_r D'\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D'. Quindi $x \in \mathrm{Jac}(D')$ e $M_\alpha D' = \mathrm{rad}((a, b)) D'$. Il Lemma 2.2.2 mostra che esistono $t_\alpha \in M_\alpha, s \in S$ tali che

$$\frac{t_\alpha}{s} \in M_\alpha D', \qquad \frac{s - t_\alpha}{s} = 1 - \frac{t_\alpha}{s} \in M_r D',$$

per ogni $r \neq \alpha$.
Quindi $t_\alpha \in M_\alpha \setminus \left(\bigcap_{r \neq \alpha} M_r\right)$ e $s - t_\alpha \in \left(\bigcap_{r \neq \alpha} M_r\right) \setminus M_\alpha$. Queste osservazioni implicano che, se $N = \{{t_\alpha}^i\}_{i=1}^{\infty}$, nel dominio

$$D'' = N^{-1} D',$$

$\{M_r D''\}_{r \neq \alpha}$ è l'insieme degli ideali massimali.
Inoltre $s - t_\alpha \in \bigcap_{r \neq \alpha} M_r D'' = \mathrm{rad}(x D'')$. Quindi $(s - t_\alpha)^k \in x D''$ per qualche intero positivo k, da cui

$$\frac{(s - t_\alpha)^k}{x} = \xi \in D''.$$

Conseguentemente $v_r(\xi) \geq 0$ per ogni $r \neq \alpha$. E, per ogni $M_\beta \in \Delta$ tale che $x \notin M_\beta$, chiaramente vale $v_\beta(\xi) \geq 0$. In più

$$v_\alpha(\xi) = kv_\alpha(s - t_\alpha) - v_\alpha(x) = -v_\alpha(x) < 0.$$

In conclusione si ha $\xi \in \left(\bigcap_{\beta \neq \alpha} D_{M_\beta}\right) \setminus D_{M_\alpha}$ e la (i) risulta così dimostrata.

□

Corollario 2.2.5. *Sia D un dominio di Prüfer di dimensione uno. D è uno $\sharp$-dominio se e solo se ogni elemento non nullo e non invertibile di D appartiene a un numero finito di ideali massimali.*

Dimostrazione. Se ogni elemento non invertibile di D è contenuto in un numero finito di ideali massimali di D, allora D è uno $\sharp$-dominio, come conseguenza diretta della Proposizione 2.2.1.
Viceversa sia x un elemento non invertibile di D e sia $\{M_r\}$ l'insieme degli ideali massimali di D che contengono x. Sia $M_\alpha \in \{M_r\}$; essendo D uno $\sharp$-dominio, il Teorema 2.2.4 garantisce che M_α è radicale di un ideale generato da due elementi. Ragionando, allora, come nel punto $(ii) \Rightarrow (i)$ della dimostrazione del Teorema 2.2.4, si può costruire un sopra-anello D' di D tale che:

1. D' è un dominio di Prüfer uno-dimensionale.

2. $\mathrm{Jac}(D') \neq 0$.

3. $\{M_r D'\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D'.

4. $M_\alpha D'$ è il radicale di un ideale generato da due elementi.

Applicando, allora, consecutivamente il Lemma 2.2.2 e il Lemma 2.2.3, si ottiene che $\{M_r D'\}$ è un insieme finito, ovvero che $\{M_r\}$ è un insieme finito, come volevasi dimostrare. □

Si dispone, ora, di tutti gli strumenti necessari per dimostrare il teorema più importante di questa sezione.

Teorema 2.2.6. *Sia D un dominio almost Dedekind. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *D è un dominio di Dedekind.*

(ii) *D è uno $\sharp$-dominio.*

(iii) *Ogni elemento non nullo e non invertibile di D è contenuto in un numero finito di ideali massimali, ovvero D ha il carattere di finitezza.*

(iv) *D è noetheriano.*

(v) *Ogni ideale massimale di D è invertibile.*

Dimostrazione. Le equivalenze $(i) \Leftrightarrow (iii)$, $(i) \Leftrightarrow (iv)$ e $(i) \Leftrightarrow (v)$ sono già note (Teorema 0.0.5, osservando, per la terza, che D ha dimensione uno). Infine l'equivalenza $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ è il Corollario 2.2.5. □

Capitolo 3

Fattorizzazione di ideali nei domini almost Dedekind

Nel 1927 E. Noether mostrò in [27] che un dominio è di Dedekind se e solo se ogni ideale proprio non nullo si fattorizza in modo unico come prodotto di ideali massimali. Successivamente, Kubo nel 1940, e Matsusita nel 1944, migliorarono tale caratterizzazione, arrivando a dimostrare che un dominio è di Dedekind se e solo se ogni ideale proprio si fattorizza in ideali primi (a priori non massimali). Per questo motivo, appena si esce fuori dalla classe dei domini di Dedekind (se si considera, ad esempio, un dominio almost Dedekind non noetheriano), si è costretti a rinunciare a una siffatta fattorizzazione in primi per ogni ideale proprio, o, per lo meno, a limitarla a una classe di ideali che godano di particolari proprietà. Ad esempio Gilmer mostrò che, in un dominio almost Dedekind, tale fattorizzazione in primi è sicuramente possibile per gli ideali primari, i quali risultano infatti potenze del loro ideale radicale (primo) [8, Teorema 1], e anche per quegli ideali che sono contenuti in un numero finito di ideali massimali [10, Teorema 37.5].
Tutte le fattorizzazioni che considereremo saranno dunque variazioni e generalizzazioni della fattorizzazione di ogni ideale proprio come prodotto finito di ideali primi. Le modifiche riguarderanno da una parte gli ideali che appaiono nella fattorizzazione e dall'altra la classe di ideali da fattorizzare.
La prima variazione che faremo (Sezione 3.1) sarà quella di rimpiazzare i fattori primi con ideali radicali. Un ideale I ha una *fattorizzazione radicale*

se esiste un numero finito di ideali radicali $J_1, \ldots, J_n$ tali che $I = J_1 \cdots J_n$. In un articolo del 1978 [30], Vaughan e Yeagy studiarono i domini in cui ogni ideale proprio presentasse una fattorizzazione radicale e li denominarono SP-*domini*. Uno dei loro principali risultati è che un SP-dominio è un dominio almost Dedekind [30, Teorema 2.4]. Esistono invece domini almost Dedekind che non sono SP-domini, il che mostra che gli SP-domini costituiscono un sottoinsieme proprio dell'insieme dei domini almost Dedekind. La prima completa caratterizzazione degli SP-domini all'interno della classe dei domini almost Dedekind è dovuta a Olberding [28, Teorema 2.1].
Nella Sezione 3.2, l'approccio sarà quello di porre delle restrizioni sul tipo di ideali da fattorizzare. Dato un dominio almost Dedekind D, si limiterà quindi l'attenzione alla classe degli ideali frazionari finitamente generati e si introdurrà la nozione di famiglia fattorizzante. Una *famiglia fattorizzante* (se esiste) è un insieme indicizzato di ideali finitamente generati $\{J_\alpha | J_\alpha D_\alpha = P_\alpha D_{P_\alpha},\, P_\alpha \in \mathrm{Max}(D)\}$ tale che ogni ideale frazionario finitamente generato sia prodotto finito di potenze (non necessariamente positive) di ideali di tale famiglia. Loper e Lucas in [24] esaminarono il problema di determinare in quali casi un dominio almost Dedekind possieda una famiglia fattorizzante e racchiusero il loro principale risultato in [24, Corollario 2.4]. Tuttavia è ancora aperto il problema di stabilire se una famiglia fattorizzante esista per ogni dominio almost Dedekind.

3.1 Fattorizzazione in ideali radicali

In questa sezione caratterizzeremo quei domini D in cui ogni ideale è prodotto di ideali radicali (si ricorda che un ideale è detto *radicale* o *semiprimo* o SP-*ideale* se esso coincide con il suo radicale) e ne studieremo le relazioni con i domini almost Dedekind.
Introduciamo la seguente definizione.

Definizione. Un dominio D ha la *proprietà* SP o, equivalentemente, è un SP-*dominio* se ogni ideale è prodotto di ideali radicali.

Un dominio di Dedekind è un SP-dominio; questo segue direttamente dal fatto che in un dominio di Dedekind ogni ideale proprio si fattorizza in ideali

primi.
Ciò non è vero per un dominio almost Dedekind e lo dimostrano Butts e Yeagy nel loro articolo "*Finite bases for integral closures*" del 1976 [5], in cui riportano un esempio di dominio almost Dedekind non noetheriano che non è un SP-dominio. Vale, invece, il viceversa, ovvero che un SP-dominio è un dominio almost Dedekind, come dimostrano Vaughan e Yeagy nel loro articolo "*Factoring ideals into semiprime ideals*" del 1978 [30]; nello stesso articolo, partendo da una costruzione data da Heinzer e Ohm in [17], viene anche fornito un esempio non noetheriano di SP-dominio. Anche la costruzione di Nakano, in [25], della chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo numerico ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ tutte le radici p-esime dell'unità è un esempio non noetheriano di SP-dominio. Tutte queste considerazioni mostrano, insomma, che gli SP-domini costituiscono una sotto-classe propria all'interno della classe dei domini almost Dedekind.
La dimostrazione del fatto che un SP-dominio è un dominio almost Dedekind, che verrà data nel Teorema 3.1.8, deve essere preceduta da alcuni risultati intermedi.

Proposizione 3.1.1. *Se un dominio D gode della proprietà SP, allora lo stesso vale per D_P e D/P, per ogni ideale primo P di D.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, se J è un ideale radicale di D, allora JD_P è un ideale radicale di D_P.
Sia dunque B un ideale di D_P. Allora esiste un ideale A, in D, tale che $B = AD_P$. Per ipotesi,

$$A = \prod_{i=1}^{n} J_i,$$

con $J_i = \mathrm{rad}(J_i)$ per ogni i. Ma allora

$$B = \prod_{i=1}^{n} (J_i D_P),$$

con $J_i D_P = \mathrm{rad}(J_i D_P)$ e, conseguentemente, D_P è un SP-dominio.

Consideriamo ora $\overline{D} := D/P$ e sia J un ideale radicale di D contenente P. Allora

$$rad\left(\frac{J}{P}\right) = \frac{\mathrm{rad}(J)}{P} = \frac{J}{P},$$

ovvero anche J/P è radicale.
Sia dunque B un ideale di $\overline{D}$ e sia A un ideale di D contenente P tale che $B = A/P$. Per ipotesi,

$$A = \prod_{i=1}^{n} J_i,$$

dove J_i è un ideale radicale di D contenente P per ogni i. Ne segue che

$$B = \prod_{i=1}^{n} \frac{J_i}{P}$$

è prodotto di ideali radicali di $\overline{D}$. □

Proposizione 3.1.2. *Se un dominio D gode della proprietà SP, allora ogni ideale primario di D è potenza del suo radicale.*

Dimostrazione. Sia Q un ideale primario con radicale P tale che $Q \subsetneq P$. Per ipotesi

$$Q = \prod_{i=1}^{n} J_i,$$

con $J_i = \mathrm{rad}(J_i)$, per ogni i. Allora, ricorrendo alle proprietà del radicale, si ha:

$$P = \mathrm{rad}(Q) = \mathrm{rad}\left(\prod_{i=1}^{n} J_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{rad}(J_i) = \bigcap_{i=1}^{n} J_i \subseteq J_i, \quad \text{per ogni } i.$$

Inoltre, da $P \supsetneq Q = \prod_{i=1}^{n} J_i$, si ottiene che esiste h tale che $P \supseteq J_h$, il che, unito alla relazione precedente, implica $P = J_h$. E' possibile riordinare $J_1, \dots, J_n$ in modo tale che $P = J_i$ per $1 \leq i \leq k$ e $P \subsetneq J_i$ per $i > k$. Ne segue che

$$Q = P^k \prod_{i>k} J_i$$

e quindi che $Q \subseteq P^k$. Supponiamo che $P^k \nsubseteq Q$. Allora, essendo Q un ideale P-primario, deve essere $\prod_{i>k} J_i \subseteq P$, da cui $J_h \subseteq P$ per qualche $h > k$; ciò implica che esiste $h > k$ tale che $P = J_h$ e conduce a una contraddizione. Quindi $P^k \subseteq Q$, da cui $P^k = Q$. □

Corollario 3.1.3. *Un SP-dominio di dimensione uno è un dominio almost Dedekind.*

Dimostrazione. La tesi discende direttamente dalla Proposizione 3.1.2 e dal Teorema 1.0.1. □

Proposizione 3.1.4. *Sia V un dominio di valutazione. Se V è un SP-dominio, allora V è un DVR.*

Dimostrazione. Sia I un ideale proprio di V. Per ipotesi

$$I = \prod_{i=1}^{n} J_i,$$

con $J_i = \operatorname{rad}(J_i)$. Ora, in un dominio di valutazione, ogni ideale radicale è un ideale primo. Questo significa che I si fattorizza in ideali primi. Dall'arbitrarietà di I, V è un dominio di Dedekind e quindi noetheriano. □

Proposizione 3.1.5. *Se D è un SP-dominio locale il cui ideale massimale è invertibile, allora D ha dimensione uno ed è, conseguentemente, un DVR.*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che $\dim(D) > 1$ e che quindi l'ideale massimale M abbia altezza > 1. Allora esiste un ideale primo non nullo P tale che $P \subsetneq M$. Sia $x \in P \setminus \{0\}$. Per ipotesi si ha $(x) = \prod_{i=1}^{n} J_i$, con $\operatorname{rad}(J_i) = J_i$ per ogni i. Quindi $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} J_i$, da cui esiste h tale che $P \supseteq J_h$. A meno di riordinare i fattori, possiamo supporre che $P \supseteq J_1$. Poniamo $A := M^{-1}J_1$; chiaramente A è un ideale di D, in quanto $J_1 \subseteq M$ e $M^{-1} = (D : M)$. Si ha, dunque, $J_1 = AM$. Se fosse $A = D$, allora $M = J_1 \subseteq P$ che contraddirebbe quanto assunto. Deve quindi essere $A \subseteq M$, da cui $J_1 = AM \supseteq A^2$. Essendo J_1 un ideale radicale, ciò implica che $J_1 \supseteq A$. Segue che $J_1M \supseteq AM = J_1$, da cui $J_1 = J_1M$ e $M(x) = MJ_1 \dots J_n = J_1 \dots J_n = (x)$.
Sia dunque $m \in M$ tale che $xm = x$, o equivalentemente $x(1-m) = 0$. Essendo D locale, $1-m$ è invertibile in D, da cui $x = 0$, il che rappresenta una contraddizione. Ne concludiamo che $\dim(D) = 1$ e quindi, per il Corollario 3.1.3, che D è un dominio almost Dedekind. Essendo inoltre, per ipotesi, locale, D è un DVR. □

Proposizione 3.1.6. *Se D è un SP-dominio, allora ogni primo minimale P su un ideale principale non nullo ha altezza uno. In particolare D_P è un DVR.*

Dimostrazione. Sia $d \in D \setminus \{0\}$ e sia P un primo minimale su (d). In D_P allora si ha che $\mathrm{rad}(dD_P) = PD_P$, essendo PD_P l'unico ideale primo di D_P che contiene dD_P. Ne segue che dD_P è un ideale primario di D_P. Per la Proposizione 3.1.2, dD_P è una potenza di PD_P. Ciò implica che PD_P è invertibile da cui, applicando la Proposizione 3.1.5, si ottiene che D_P è un DVR. Se ne conclude, inoltre, che P ha altezza uno. □

Richiamiamo, infine, nella seguente proposizione, una proprietà che vale nei domini in cui ogni ideale primario è potenza del suo radicale, e quindi, in particolare, negli SP-domini.

Proposizione 3.1.7. *Sia D un dominio in cui ogni ideale primario è potenza del suo radicale e siano P e M ideali primi di D tali che $P \subsetneq M \subsetneq D$. Allora*

$$P \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n.$$

Dimostrazione. Sia $m \in M \setminus P$ e sia P_0 un ideale primo contenuto in M e minimale su $P+(m)$. Si osservi che per ogni intero positivo i, P_0 è un primo minimale su $P + (m^i)$. Sia

$$Q_i := (P + (m^i))D_{P_0} \cap D.$$

Notiamo che Q_i è primario in D, in quanto è contrazione di un ideale primario di D_{P_0} ($\mathrm{rad}((P + (m^i))D_{P_0}) = P_0 D_{P_0}$); per ipotesi deve quindi esistere, per ogni i, un intero positivo n_i tale che $Q_i = P_0^{n_i}$. Mostriamo che $Q_1 \supsetneq Q_2 \supsetneq \cdots$, facendo vedere che $m^i \in Q_i \setminus Q_{i+1}$. Se fosse $m^i \in Q_{i+1}$, estisterebbero $p \in P, d \in D$ e $s \in D \setminus P_0$, tali che:

$$m^i = \frac{p + dm^{i+1}}{s},$$

da cui $m^i(s - dm) \in P$; dal fatto che $m \notin P$, segue che $s - dm \in P$, ovvero $s \in P + (m) \subseteq P_0$, in contraddizione con l'ipotesi che $s \in D \setminus P_0$.
Deve quindi essere $n_1 < n_2 < \cdots$ e

$$P \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} {P_0}^{n_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} {P_0}^{i} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} M^i.$$

□

Abbiamo, a questo punto, gli strumenti necessari per dimostrare che ogni SP-dominio è un dominio almost Dedekind.

Teorema 3.1.8. *Un SP-dominio è un dominio almost Dedekind.*

Dimostrazione. Per il Corollario 3.1.3 è sufficiente mostrare che D ha dimensione uno.
Per assurdo, sia M un ideale massimale di altezza > 1. Sia dunque P un ideale primo non nullo tale che $P \subsetneq M$ e sia $x \in P \setminus \{0\}$; senza perdita di generalità possiamo supporre che P sia un primo minimale su (x). Si scelga $m \in M \setminus P$ e sia Q un ideale primo minimale sull'ideale $P + (m)$ contenuto in M. Si osservi che, per la Proposizione 3.1.6, D_P è un DVR e PD_Q è un primo di altezza uno di D_Q. Inoltre QD_Q è un primo minimale sull'ideale $PD_Q + mD_Q$.
Poniamo

$$\overline{D_Q} := \frac{D_Q}{PD_Q}.$$

Dalla Proposizione 3.1.1 sappiamo che D_Q e $\overline{D_Q}$ sono entrambi SP-domini.
In $\overline{D_Q}$,

$$\overline{Q} := \frac{QD_Q}{PD_Q}$$

è, per la Proposizione 3.1.6, un primo di altezza uno di $\overline{D_Q}$. Segue che $\overline{D_Q}$ è un SP-dominio locale di dimensione uno, ovvero un DVR. Quindi si ha

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Q}^n = \overline{(0)}$$

e, conseguentemente,

$$PD_Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} (QD_Q)^n. \tag{3.1}$$

Si osservi che $\dim(D_Q) \geq 2$, in quanto l'ideale QD_Q ha almeno altezza due. Per giungere a una contraddizione sarà dunque sufficiente dimostrare che D_Q è un DVR. A tale scopo, per la Proposizione 3.1.4, basterà mostrare che D_Q è un dominio di valutazione. Facciamo dunque vedere che in D_Q gli ideali sono lineramente ordinati. Mostriamo per prima cosa che se I è un ideale proprio di D_Q, allora $I \subseteq PD_Q$ oppure $I \supseteq PD_Q$; se $I \nsubseteq PD_Q$ allora $\mathrm{rad}(I) = QD_Q$, in quanto, per la Proposizione 3.1.7, ogni ideale primo propriamente contenuto in QD_Q è contenuto in $\bigcap_{n=1}^{\infty}(QD_Q)^n = PD_Q$. Ne segue che I è QD_Q-primario da cui, per la Proposizione 3.1.2, esiste un intero positivo k tale che $I = (QD_Q)^k$. Segue quindi, da (3.1), che $I \supseteq PD_Q$. Siano ora I e J ideali di D_Q. Se $I, J \subseteq PD_Q$, allora $I \subseteq J$ o $J \subseteq I$ in quanto $(D_Q)_{PD_Q} \cong D_P$ è un DVR. Se $I, J \supseteq PD_Q$, allora $I \subseteq J$ o $J \subseteq I$ in quanto è stato già osservato che $\overline{D_Q}$ è un DVR. Altrimenti deve essere $I \subseteq PD_Q \subseteq J$ oppure $J \subseteq PD_Q \subseteq I$ e quindi, in ogni caso, si ha $I \subseteq J$ o $J \subseteq I$. Ciò conduce a una contraddizione e, pertanto, se ne conclude che $\dim(D) = 1$. $\square$

Appurato che ogni SP-dominio è un dominio almost Dedekind, passiamo dunque al problema della caratterizzazione di un SP-dominio all'interno della classe dei domini almost Dedekind, la cui completa risoluzione, risalente al 2005, si deve a Olberding e al suo articolo "*Factorization into radical ideals*" [28].
Per richiamare tale risultato è necessario introdurre la definizione di ideale massimale critico.

Definizione. Un ideale massimale M di un dominio D si dice *critico* se ogni sottoinsieme finito di M è contenuto nel quadrato di un ideale massimale di D. Equivalentemente, M è critico se e solo se ogni sottoideale finitamente generato di M è contenuto nel quadrato di un ideale massimale di D.

Un ideale massimale idempotente è ovviamente critico. Nessun ideale massimale di un dominio di Dedekind è critico, in quanto è finitamente generato e non idempotente.

Possiamo a questo punto enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.1.9. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti per un dominio almost Dedekind D:*

(i) D è un SP-dominio.

(ii) D è privo di ideali massimali critici.

(iii) Se A è un ideale proprio finitamente generato di D, allora $\mathrm{rad}(A)$ *è un ideale finitamente generato di D.*

(iv) *Ogni ideale principale proprio di D è prodotto di ideali radicali.*

(v) *Per ogni ideale proprio A di D esistono ideali radicali $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n$ tali che $A = J_1 J_2 \cdots J_n$.*

(vi) *Ogni ideale proprio A di D può essere fattorizzato in modo unico come prodotto $A = J_1 J_2 \cdots J_n$ di ideale radicali J_i tali che $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n$.*

Dimostrazione.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sia M un ideale massimale di D e sia A un ideale principale non nullo contenuto in M. Per ipotesi esistono ideali radicali $J_1, \dots J_n$ tali che $A = J_1 \cdots J_n$. Poiché $J_1 \cdots J_n \subseteq M$, esiste i tale che $J_i \subseteq M$. Inoltre, essendo A principale, J_i è invertibile e quindi finitamente generato. Se ora N è un ideale massimale tale che $J_i \subseteq N$, allora, essendo D_N un DVR (D è almost Dedekind), $J_i D_N$ è un ideale primo, in quanto radicale. Inoltre, poiché D_N ha dimensione uno, deve essere $J_i D_N = N D_N$, da cui J_i non è contenuto in N^2. Ne segue che l'ideale finitamente generato J_i è contenuto in M, ma in nessun quadrato di un ideale massimale di D. Quindi M non è critico.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Mostriamo per prima cosa che, per ogni ideale massimale M e per ogni ideale proprio finitamente generato I contenuto in M, esiste un ideale radicale finitamente generato J di D tale che $I \subseteq J \subseteq M$.
Sia dunque I un ideale proprio finitamente generato e M un ideale massimale tale che $I \subseteq M$. Per ipotesi, esiste un ideale finitamente generato B contenuto in M, ma in nessun quadrato di un qualsiasi ideale massimale. Sia $J := I + B$ (J è chiaramente finitamente generato). Se N è un ideale massimale di D contenente J, allora $JD_N \subseteq ND_N$. Si ha $BD_N \nsubseteq N^2 D_N$, altrimenti $B \subseteq N^2 D_N \cap D = N^2$. Quindi, poiché in D_N un qualsiasi ideale è potenza dell'ideale massimale ND_N, deve essere $BD_N = ND_N$, da cui $JD_N = ND_N$ per tutti gli ideali massimali N contenenti J. Quindi

$$J = \bigcap_{\substack{N \in \mathrm{Max}(D) \\ N \supseteq J}} JD_N \cap D = \bigcap_{\substack{N \in \mathrm{Max}(D) \\ N \supseteq J}} ND_N \cap D = \bigcap_{\substack{N \in \mathrm{Max}(D) \\ N \supseteq J}} N$$

è intersezione di tutti gli ideali massimali che lo contengono, ovvero è un ideale radicale. Inoltre $I \subseteq J \subseteq M$.
Sia ora A un ideale proprio finitamente generato di D e $J := \mathrm{rad}(A)$. Si mostrerà che J è finitamente generato, facendo vedere che esso è invertibile. Chiaramente l'asserto è vero se $A = 0$. Supponendo dunque che $A \neq 0$, sarà sufficiente mostrare che

$$(D : J)D_M = (D_M : JD_M)$$

per ogni ideale massimale M di D. Infatti, una volta che ciò sarà mostrato, essendo JD_M invertibile in D_M, si avrà

$$(D : J)JD_M = (D_M : JD_M)JD_M = D_M,$$

da cui

$$(D : J)J = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} (D : J)JD_M = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} D_M = D.$$

Sia dunque M un ideale massimale di D. E' chiaro che $(D : J)D_M \subseteq (D_M : JD_M)$, in quanto

$$(D : J)D_M JD_M = (D : J)JD_M = DD_M = D_M.$$

Viceversa, sia $q \in (D_M : JD_M)$, ovvero q è un elemento del campo dei quozienti di D tale che $qJD_M \subseteq D_M$ o, equivalentemente, tale che $qJ \subseteq D_M$. Si mostrerà che $q \in (D : J)D_M$. Per quanto già osservato, esiste un ideale radicale finitamente generato J_1 di D tale che $A \subseteq J_1 \subseteq M$. Essendo A e J_1 entrambi invertibili, esiste un ideale finitamente generato B_1 di D tale che $A = J_1B_1$. Se $B_1 \subseteq M$ allora si può ripetere il ragionamento per ottenere un ideale radicale finitamente generato J_2 tale che $B_1 \subseteq J_2 \subseteq M$ e un ideale finitamente generato B_2 tale che $B_1 = J_2B_2$. Continuando in questo modo, si otterrà o che $A = J_1 \cdots J_nB_n$ per qualche $B_n \nsubseteq M$, oppure che esistono ideali radicali $J_1, J_2, \ldots \subseteq M$ tali che, per ogni $k > 0$, $A \subseteq J_1 \cdots J_k$. In quest'ultimo caso $A \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} M^k$. Inoltre, essendo M non idempotente, $\bigcap_{k=1}^{\infty} M^k$ è, per il Teorema 0.0.3, un ideale primo strettamente contenuto in M e, dal fatto che D è uno-dimensionale, esso è nullo. Quindi $A = 0$, contraddicendo ciò che era stato assunto. Ne segue che esistono ideali radicali finitamente generati $J_1, \ldots, J_n$ tali che $A = J_1 J_2 \cdots J_n B_n$ per qualche ideale finitamente generato $B_n \nsubseteq M$. Ora $J = \mathrm{rad}(A) = J_1 \cap \cdots \cap J_n \cap \mathrm{rad}(B_n)$, da cui, essendo $\mathrm{rad}(B_n) \nsubseteq M$, si ha

$$\begin{aligned} qJD_M &= q(J_1 \cap \cdots \cap J_n)D_M \cap q\,\mathrm{rad}(B_n)D_M = \\ &= q(J_1 \cap \cdots \cap J_n)D_M \cap D_M = \\ &= q(J_1 \cap \cdots \cap J_n)D_M \end{aligned}$$

Allora, poiché $qJD_M \subseteq D_M$, deve essere $q(J_1 \cap \cdots \cap J_n) \subseteq D_M$. Poiché $J_1 \cap \cdots \cap J_n$ è un'intersezione finita di ideali finitamente generati, tale intersezione è finitamente generata (Proposizione 0.0.2). Ne segue che esiste $b \in D \setminus M$ tale che $bq(J_1 \cap \cdots \cap J_n) \subseteq D$. Quindi $bqJ \subseteq D$. Segue che

$$q \in (D : bJ) = \frac{1}{b}(D : J) \subseteq (D : J)D_M$$

e quindi $(D_M : J) = (D : J)D_M$ per ogni ideale massimale M contenente A.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sia A un ideale proprio principale di D. Poiché l'asserto è chiaramente vero se $A = (0)$, possiamo supporre $A \neq (0)$. Poniamo $J_1 = \mathrm{rad}(A)$; per ipotesi J_1 è finitamente generato. Essendo A e J_1 entrambi invertibili, $A = J_1 B_1$ per qualche ideale finitamente generato B_1 di D. Se $B_1 = D$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti sia $J_2 = \mathrm{rad}(B_1)$. Allora $A = J_1 J_2 B_2$, per qualche ideale finitamente generato B_2 di D. In più, essendo J_1 finitamente generato e $J_1 = \mathrm{rad}(A)$, esiste $n > 0$ tale che $J_1^n \subseteq A \subseteq J_2$; essendo J_2 un ideale radicale, ciò implica che $J_1 \subseteq J_2$. Ripetendo questo ragionamento si ottiene o che A è prodotto di ideali radicali oppure che esiste una catena di ideali radicali $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n \subseteq \cdots$ tale che, per ogni $k > 0$, $A \subseteq J_1 J_2 \cdots J_k$. In quest'ultimo caso, se M è un ideale massimale che contiene $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k$, $A \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} M^i$. Come nella dimostrazione dell'implicazione precedente, da questo segue che $A = 0$, in contraddizione con quanto assunto. A deve quindi essere prodotto di ideali radicali di D.

$(iv) \Rightarrow (v):$ Sia a un elemento non nullo di D. Essendo D un dominio almost Dedekind, possiamo considerare la funzione $\gamma_a : \mathrm{Max}(D) \to \mathbb{Z}$ così definita:

$$\gamma_a(M) = v_M(a)$$

dove v_M è la valutazione discreta corrispondente a D_M.

Mostriamo per prima cosa che γ_a ha immagine finita. Per ipotesi esistono ideali radicali distinti $K_1, \dots, K_m$ e interi positivi $e_1, \dots, e_m$ tali che $aD = K_1^{e_1} \cdots K_m^{e_m}$. Sia M un ideale massimale di D che contiene a e sia $X := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : K_i \subseteq M\}$. Per ogni $i \in X$, essendo K_i un ideale radicale e D_M un DVR, vale che $K_i D_M = MD_M$. Inoltre $K_i D_M = D_M$ per ogni $i \notin X$. Allora si ha che

$$aD_M = K_1^{e_1} \cdots K_m^{e_m} D_M = \prod_{i \in X} M^{e_i} D_M = M^{\sum_{i \in X} e_i} D_M.$$

Quindi $\gamma_a(M) = v_M(a) = \sum_{i \in X} e_i$. Ne segue che per ogni ideale massimale M, $\gamma_a(M) = 0$ oppure $\gamma_a(M)$ è somma di alcuni e_i e, conseguentemente, γ_a ha immagine finita.

Sia $n > 0$. Mostriamo che

$$V := \gamma_a^{-1}([n, \infty)) = \{M \in \mathrm{Max}(D) : a \in M^n\}$$

è chiuso in $\mathrm{Max}(D)$. Sia $M \in V$. Allora, come notato precedentemente, $\sum_{i \in X} e_i = \gamma_a(M) \geq n$. Quindi l'insieme $F := \{X \subseteq \{1, 2, \dots, m\} : \sum_{i \in X} e_i \geq n\}$ è non vuoto. Poniamo

$$I = \bigcap_{X \in F} \left(\sum_{i \in X} K_i \right).$$

Faremo vedere che V è chiuso mostrando che $V = \{M \in \mathrm{Max}(D) : M \supseteq I\}$. Se $M \in V$, allora esiste un sottoinsieme X di $\{1, 2, \dots, m\}$ tale che $\sum_{i \in X} e_i \geq n$ e $M \supseteq \sum_{i \in X} K_i \supseteq I$. Quindi $V \subseteq \{M \in \mathrm{Max}(R) : M \supseteq I\}$. Viceversa, sia $M \in \mathrm{Max}(D)$ con $M \supseteq I$. Allora, poiché I è un'intersezione finita, $\sum_{i \in X} K_i \subseteq M$ per qualche $X \in F$. Quindi $K_i \subseteq M$ per ogni $i \in X$ e segue che

$$aD = K_1^{e_i} \cdots K_m^{e_m} \subseteq \prod_{i \in X} K_i^{e_i} \subseteq \prod_{i \in X} M^{e_i} = M^{\sum_{i \in X} e_i} \subseteq M^n.$$

Quindi $a \in M^n$, da cui $M \in V$.
Sia ora A un ideale proprio non nullo di D. Per ogni ideale massimale M di D poniamo
$$v_M(A) := \min_{a \in A}\{v_M(a)\}.$$
Sia $Y := \{v_M(A) : M \in \mathrm{Max}(D) \text{ e } A \subseteq M\}$. Mostriamo che Y è finito. Sia a un elemento non nullo di A. Per quanto visto γ_a ha immagine finita, ovvero $\{v_M(a) : M \in \mathrm{Max}(D)\}$ è un insieme finito. Essendo $0 < v_M(A) \leq v_M(a)$ per ogni $M \in$ Max(D), ne deduciamo che Y è finito; possiamo dunque scrivere $Y = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ per interi positivi $0 < f_1 < f_2 < \cdots < f_n$. Per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, sia
$$V_i = \{M \in \mathrm{Max}(D) : A \subseteq M^{f_i}\}.$$
Facciamo vedere che ogni V_i è un sottoinsieme chiuso di $\mathrm{Max}(D)$. Per ogni i si ha:
$$\begin{aligned} V_i &= \{M \in \mathrm{Max}(D) : a \in M^{f_i}, \forall\, a \in A\} \\ &= \{M \in \mathrm{Max}(D) : M \in \gamma_a^{-1}([f_i, \infty)), \forall\, a \in A\} \\ &= \bigcap_{a \in A} \gamma_a^{-1}([f_i, \infty)) \end{aligned}$$
Sappiamo che ogni $\gamma_a^{-1}([f_i, \infty))$ è un sottoinsieme chiuso di $\mathrm{Max}(D)$, da cui V_i risulta essere un'intersezione di sottoinsiemi chiusi e pertanto è chiuso.
Definiamo, per ogni i,
$$J_i = \bigcap_{M \in V_i} M.$$
Si noti che J_i è un ideale radicale per ogni i e che, essendo $V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V_1$, si ha $A \subseteq J_1 \subseteq J_2 \subseteq \cdots \subseteq J_n$. Poniamo
$$B = J_1^{f_1} J_2^{f_2 - f_1} \cdots J_n^{f_n - f_{n-1}}.$$
Faremo vedere che $A = B$. A tale scopo è sufficiente mostrare che $AD_M = BD_M$ per ogni ideale massimale M di D. Se M è un ideale massimale di D che contiene B, sia k il più grande intero $\leq n$ tale che $J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_k \subseteq M$. Allora $BD_M = J_1^{f_1} \cdots J_k^{f_k - f_{k-1}} D_M = M^{f_k} D_M$.

Inoltre, per come è stato scelto k, V_k è il più piccolo elemento della catena $V_n \subseteq \cdots \subseteq V_1$ tale che $M \in V_k$. Poiché $v_M(A) \in \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, si ha $v_M(A) = f_k$. Quindi $AD_M = M^{f_k}D_M = BD_M$. Viceversa, supponiamo che M sia un ideale massimale di D che contenga A. Allora $v_M(A) = f_k$ per qualche $k \leq n$, da cui $AD_M = M^{f_k}D_M$. Quindi $M \in V_k$, ma $M \notin V_m$ per ogni $k < m \leq n$. Il fatto che ogni V_i sia chiuso implica che $J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_k \subseteq M$, ma $J_m \nsubseteq M$ per ogni m tale che $k < m \leq n$. Quindi $BD_M = J_1^{f_1} \cdots J_k^{f_k - f_{k-1}} D_M = M^{f_k}D_M = AD_M$. Se ne conclude che $A = B$.

$(v) \Rightarrow (vi)$: Supponiamo che $A = J_1 \cdots J_n = K_1 \cdots K_m$ con J_i, K_h ideali radicali, per ogni i, h, tali che $J_1 \subseteq \cdots \subseteq J_n$ e $K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m$. Si osservi che un ideale primo M di D contiene J_1 se e solo se M contiene A, se e solo se contiene K_1. Allora $J_1 = \mathrm{rad}(A) = K_1$. Si ricorda che, per il Teorema 1.0.4, un dominio è almost Dedekind se e solo se in esso vale la legge di cancellazione per ideali. Quindi $J_2 \cdots J_n = K_2 \cdots K_m$ e un ragionamento di tipo induttivo completa la dimostrazione.

$(vi) \Rightarrow (i)$: Banale, segue direttamente dalla definizione di SP-dominio.

□

Corollario 3.1.10. *Un dominio D è un SP-dominio se e solo se D è un dominio di Prüfer di dimensione uno privo di ideali massimali critici.*

Dimostrazione. Se D è un SP-dominio, allora si è già visto che D è un dominio almost Dedekind, e quindi, in particolare, un dominio di Prüfer di dimensione uno. Inoltre D è privo di ideali massimali critici per il Teorema 3.1.9.

Viceversa, supponiamo che D sia un dominio di Prüfer di dimensione uno privo di ideali massimali critici. Allora nessun ideale massimale M di D è idempotente. D è quindi un dominio almost Dedekind per il Teorema 1.0.4. Con il Teorema 3.1.9 si conclude che D è un SP-dominio. □

3.2 Fattorizzazione di ideali finitamente generati

In questa sezione supporremo che D sia un dominio di Prüfer di dimensione uno, con campo dei quozienti K.
Abbiamo visto nel Capitolo 2 che un dominio almost Dedekind D è un dominio di Dedekind se e solo se ogni ideale massimale contiene un ideale finitamente generato che non sia contenuto in altri ideali massimali. Pertanto, se D è un dominio almost Dedekind non noetheriano, allora alcuni ideali massimali non soddisferanno tale proprietà, però, chissà, qualcuno si.
Per queste ragioni, introduciamo la seguente definizione.

Definizione. Un ideale massimale M di D è un *primo sharp* se contiene un ideale finitamente generato che non sia contenuto in nessun altro ideale massimale di D. Un ideale massimale che non è primo sharp è detto *primo dull*.

Poiché D ha dimensione uno, questo è equivalente a dire che M è il radicale di un ideale finitamente generato. Dal Teorema 2.2.4 segue, inoltre, che un ideale massimale M è un primo sharp se e solo se $D_M \not\supseteq \bigcap_{N \in \Delta_M} D_N$, dove $\Delta_M = \mathrm{Max}(D) \setminus \{M\}$.

Osservazioni

1. Ogni ideale massimale finitamente generato (in particolare ogni ideale massimale invertibile) è un primo sharp.

2. Se I un ideale finitamente generato tale che I sia contenuto in un numero finito di ideali massimali, siano $M_1, \dots, M_n$, allora M_i è un primo sharp per ogni i.
   Infatti, fissato i, si supponga che $I = (a_1, \dots, a_s)$ e sia $b_j \in M_i \setminus M_j$, per ogni $j \neq i$. Consideriamo l'ideale
   $$J = (a_1, \dots, a_s, b_1, \dots b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n).$$
   Chiaramente $J \subseteq M_i$. Tuttavia, poiché $b_j \notin M_j$, $J \not\subseteq M_j$ per ogni $j \neq i$. Ne segue che M_i contiene un ideale finitamente generato che non è contenuto in nessun altro ideale massimale, ovvero M_i è un primo sharp.

Possiamo dunque partizionare l'insieme degli ideali massimali di D in due insiemi: $\mathrm{Max}(D) = \mathcal{M}_\sharp(D) \sqcup \mathcal{M}_\dagger(D)$, dove $\mathcal{M}_\sharp(D)$ indica l'insieme dei primi sharp e $\mathcal{M}_\dagger(D)$ l'insieme dei primi dull di D.
Chiaramente, per quanto visto nella sezione precedente, D è uno $\sharp$-dominio se e solo se $\mathcal{M}_\sharp(D) = \mathrm{Max}(D)$. D'altro canto, se $\mathcal{M}_\dagger(D) = \mathrm{Max}(D)$, diciamo che D è un *dominio dull.*

Introdotta la precedente nomenclatura, dato un dominio di Prüfer D unodimensionale, possiamo definire ricorsivamente:

1) $D_1 = D$;

2) $D_2 = \displaystyle\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\dagger(D_1)} (D_1)_M$;

$\vdots$

i) $D_i = \displaystyle\bigcap_{M \in \mathcal{M}_\dagger(D_{i-1})} (D_{i-1})_M$;

$\vdots$

arrestandoci a D_n se $\mathcal{M}_\dagger(D_n)$ è vuoto, nel qual caso poniamo $D_{n+1} = K$, oppure se $\mathcal{M}_\dagger(D_n) = \mathrm{Max}(D_n)$, nel qual caso vale $D_n = D_{n+1}\,(\neq K)$.
Si osservi innanzitutto che, per il Teorema 0.0.4, D_i è un dominio di Prüfer di dimensione uno, per ogni i.
Nel caso in cui $D_n \subsetneq D_{n+1} = K$ si dice che D ha *grado sharp* n. Chiaramente un dominio D che ha grado sharp n è tale che ogni ideale massimale di D_n è un primo sharp. D'altra parte, se $D = D_1 \subsetneq D_2 \subsetneq \cdots \subsetneq D_n = D_{n+1} \neq K$, si dice che D ha *grado dull* n. Analogamente un dominio D che ha grado dull n è tale che ogni ideale massimale di D_n è un primo dull.
Si noti che uno $\sharp$-dominio è un dominio con grado sharp 1 e un dominio dull è un dominio con grado dull 1.

Per comodità definiamo anche il grado sharp di un ideale di D, sia intero che frazionario. Per un ideale frazionario I di D diciamo che I ha *grado sharp* n se $ID_n \neq D_n$ e $ID_{n+1} = D_{n+1}$. Si noti che un ideale proprio (intero) I di D ha grado sharp uno se e solo se ogni ideale massimale contenente

I è sharp. Inoltre dalla definizione segue che un ideale primo P di D ha grado sharp n se e solo se PD_i è dull in D_i, per ogni $i < n$, e PD_n è sharp in D_n, ovvero n rappresenta il più piccolo intero i tale che PD_i è sharp in D_i. Chiaramente un primo sharp ha grado sharp uno.
Per un qualsiasi ideale intero I, di grado sharp finito o meno, denotiamo con $\mathcal{M}(I)$ l'insieme degli ideali massimali che contengono I e con D_I l'anello $\bigcap_{M \in \mathcal{M}(I)} D_M$. Si ricorrerà alla proprietà enunciata nella seguente proposizione.

Proposizione 3.2.1. *I soli ideali primi di D che sopravvivono in D_I sono quelli che contengono I.*

Dimostrazione. Si supponga che P sia un ideale massimale che non contenga I. Allora $P \subsetneq P + I = D$, da cui esistono $p \in P$ e $i \in I$ tali che $p + i = 1$. Ne segue che p non appartiene a nessun ideale M dell'insieme $\mathcal{M}(I)$, altrimenti se ne contraddirebbe la massimalità. Quindi $1/p \in D_M$ per ogni $M \in \mathcal{M}(I)$, ovvero $1/p \in D_I$. Ma allora $1 = p\frac{1}{p} \in PD_I$, vale a dire che l'ideale P non sopravvive in D_I. $\square$

Il seguente lemma studia gli ideali massimali di D_i in relazione alle loro contrazioni in D_{i-1} e caratterizza i primi di grado sharp finito in un dominio di Prüfer di dimensione uno.

Lemma 3.2.2. *Sia D un dominio di Prüfer di dimensione uno. Allora, per ogni $i \geq 1$:*

(a) Se M è un ideale massimale di D_i, allora c'è un ideale massimale P di D tale che $M = PD_i$ e PD_{i-1} è un primo dull di D_{i-1}.

(b) Se $P \in Max(D)$ sopravvive in D_i, allora:

- *PD_{i-1} è un primo dull di D_{i-1};*
- *PD_i è in $\mathcal{M}_\sharp(D_i)$ se e solo se esiste un ideale finitamente generato I di D tale che P sia l'unico ideale massimale di D che, contemporaneamente, contenga I e sopravviva in D_i.*

Dimostrazione.

(a) Sia M un ideale massimale di D_i. Poiché D è un dominio di Prüfer uno-dimensionale e D_i un sopra-anello di D, dal Teorema 0.0.4, si ha che ogni primo di D_i è ottenuto come estensione di un massimale di D. Dunque $M = PD_i$, per qualche $P \in \mathrm{Max}(D)$. Per mostrare che PD_{i-1} è un primo dull di D_{i-1} consideriamo cosa accade a un primo sharp Q di D_{i-1}. Per definizione Q contiene un ideale finitamente generato J che non è contenuto in nessun altro ideale massimale di D_{i-1}. In particolare nessun primo dull di D_{i-1} contiene J, da cui J^{-1} (J è invertibile in quanto ideale finitamente generato in un dominio di Prüfer) è contenuto in ogni localizzazione di D_{i-1} in un primo dull, vale a dire $J^{-1} \subseteq D_M$ per ogni $M \in \mathcal{M}_\dagger(D_{i-1})$. Ne segue che

$$J^{-1} \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{M}_\dagger(D_{i-1})} (D_{i-1})_M = D_i.$$

Ma allora $JD_i = JJ^{-1}D_i = D_i$. Ne segue che $D_i = JD_i \subseteq \mathrm{rad}(J)D_i = QD_i$, ovvero Q non sopravvive in D_i; ne concludiamo che un primo sharp di D_{i-1} non sopravvive in D_i. Dal fatto che $PD_i = M \subsetneq D_i$ si conclude che PD_{i-1} non è un primo sharp ed è quindi dull.

(b) Supponiamo che $P \in \mathrm{Max}(D)$ sopravviva in D_i, ovvero che $PD_i \neq D_i$. Allora, per quanto visto nel punto precedente, PD_{i-1} deve essere un primo dull di D_{i-1}.

Supponiamo ora che esista un ideale finitamente generato I di D tale che P sia l'unico ideale massimale di D che, contemporaneamente, contenga I e sopravviva in D_i. In particolare, PD_i è l'unico ideale massimale di D_i che contiene I. Ne segue che PD_i è un primo sharp di D_i.

Viceversa, se PD_i è un primo sharp di D_i, allora esiste un ideale finitamente generato J di D_i per cui vale che $PD_i = \mathrm{rad}(J)$. Poiché PD_i è generato dagli elementi di P, esiste un ideale finitamente generato I di D contenuto in P la cui estensione a D_i è contenuta in PD_i e contiene J. Se ora M è un altro ideale massimale di D che contiene I, chiaramente M non può sopravvivere in D_i, altrimenti si contraddirebbe $PD_i = \mathrm{rad}(J)$.

□

Il lemma precedente afferma, quindi, che ogni primo di D_i si estende a partire da un primo di D. Inoltre, dalla sua dimostrazione, si deduce che i primi sharp e i primi dull di un generico D_i si comportano in modo diverso quando vengono estesi a D_{i+1}. Infatti ogni ideale massimale in $\mathcal{M}_\sharp(D_i)$ esplode in D_{i+1}, mentre un ideale massimale in $\mathcal{M}_\dagger(D_i)$ si estende a un ideale massimale di D_{i+1} divenendo, eventualmente, un primo sharp di D_{i+1}. Tutto ciò implica che, fintanto che $D_i \neq D_{i+1} \neq K$, l'insieme degli ideali massimali di D_{i+1} è dato da

$$\mathrm{Max}(D_{i+1}) = \{PD_{i+1} | P \in \mathcal{M}_\dagger(D_i)\}.$$

Risulta, inoltre, che, se D ha grado sharp n, gli ideali primi di D che generano primi (sharp) di D_n sono esattamente gli ideali primi di grado sharp n.

Giungiamo quindi al problema della fattorizzazione di ideali nei domini almost Dedekind. Richiamiamo innanzitutto il seguente risultato, con cui Gilmer ha generalizzato la fattorizzazione presente nei domini di Dedekind.

Proposizione 3.2.3. *Sia I un ideale proprio di un dominio almost Dedekind D tale che I sia contenuto in un numero finito di ideali massimali $M_1, M_2, \ldots, M_n$ di D. Allora $I = M_1^{e_1} M_2^{e_2} \cdots M_n^{e_n}$, dove $e_1, \ldots, e_n$ sono interi positivi e tale rappresentazione è unica a meno dell'ordine dei fattori.*

Dimostrazione. Si ha:

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} (ID_{M_i} \cap D).$$

Dall'ipotesi che D è un dominio almost Dedekind, ogni D_{M_i} è un DVR, da cui ID_{M_i} è una potenza positiva di $M_i D_{M_i}$ per ogni i: $ID_{M_i} = M_i^{e_i} D_{M_i}$. Ne segue che

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} (ID_{M_i} \cap D) = \bigcap_{i=1}^{n} (M_i^{e_i} D_{M_i} \cap D) = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{e_i}.$$

Poiché gli ideali M_i sono ideali massimali distinti, gli ideali $M_i^{e_i}$ sono a due e due coprimi. Quindi

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} M_i^{e_i} = M_1^{e_1} M_2^{e_2} \cdots M_n^{e_n}.$$

Si noti che nella fattorizzazione di I non possono comparire ideali massimali di D che non appartengano all'insieme $\{M_1, \ldots, M_n\}$, perché $M_1, \ldots, M_n$ sono tutti e soli gli ideali massimali che contengono I. Supponiamo che

$$I = M_1^{e_1} M_2^{e_2} \cdots M_n^{e_n} = M_1^{f_1} M_2^{f_2} \cdots M_n^{f_n}.$$

Allora, per ogni i, si ha $ID_{M_i} = M_i^{e_i} D_{M_i} = M_i^{f_i} D_{M_i}$, da cui, essendo D_{M_i} un DVR, deve essere $e_i = f_i$. □

La proposizione precedente vale, in particolare, per gli ideali finitamente generati. Si è già visto che, se un ideale finitamente generato I è contenuto in un numero finito di ideali massimali, tali ideali risultano essere primi sharp e, conseguentemente, se M è un primo dull, si ha che $I \nsubseteq M$; ne segue che $ID_2 = D_2$, ovvero I ha grado sharp uno.
Nel lemma seguente mostreremo allora, più generalmente, che in un dominio almost Dedekind gli ideali frazionari finitamente generati di grado sharp uno sono esattamente quelli che possono essere fattorizzati in un prodotto finito di potenze (eventualmente negative) di ideali massimali.

Lemma 3.2.4. *Sia D un dominio almost Dedekind e sia I un ideale frazionario finitamente generato non nullo di D, $I \neq D$. Allora I è prodotto finito di potenze non nulle di ideali massimali (univocamente determinati) se e solo se I ha grado sharp uno. Inoltre tali massimali sono primi sharp.*

Dimostrazione. Supponiamo che $I = M_1^{r_1} M_2^{r_2} \cdots M_n^{r_n}$, dove r_i è un intero non nullo. Poiché I è finitamente generato, I è invertibile. In particolare, quindi, M_i è invertibile per ogni i e conseguentemente è un primo sharp. Ne segue che $M_i D_2 = D_2$ per ogni i. Lo stesso vale per M_i^{-1}. Quindi $ID_2 = M_1^{r_1} M_2^{r_2} \cdots M_n^{r_n} D_2 = D_2$, ovvero I ha grado sharp uno.
Viceversa assumiamo che I abbia grado sharp uno. Allora, per definizione, $ID_2 = D_2$. Si partizioni $\mathrm{Max}(D)$ negli insiemi:

- $\mathcal{M}^0(I) = \{P \in \mathrm{Max}(D) | ID_P = D_P\}$;
- $\mathcal{M}^+(I) = \{P \in \mathrm{Max}(D) | ID_P \subseteq PD_P\}$;
- $\mathcal{M}^-(I) = \{P \in \mathrm{Max}(D) | I^{-1}D_P \subseteq PD_P\}$.

Si noti che uno o due di questi insiemi possono essere vuoti. Poiché ogni primo dull di D sopravvive in D_2 e poiché vale $ID_2 = D_2$, ogni primo dull deve essere nell'insieme $\mathcal{M}^0(I)$ e conseguentemente $\mathcal{M}^+(I)$ e $\mathcal{M}^-(I)$ sono costituiti solo da primi sharp. Quindi

$$D_I^+ = \bigcap_{P\in\mathcal{M}^+(I)} D_P \qquad \text{e} \qquad D_I^- = \bigcap_{P\in\mathcal{M}^-(I)} D_P.$$

sono entrambi domini di Dedekind (in quanto, tutti i loro ideali massimali sono primi sharp) con radicale di Jacobson non nullo. Poiché in un dominio di Dedekind ogni elemento non nullo è contenuto in un numero finito di ideali massimali, ne segue che ognuno di essi è semilocale, ovvero $\mathcal{M}^+(I)$ e $\mathcal{M}^-(I)$ sono insiemi finiti. Si noti che $\mathcal{M}^-(I)$ è vuoto se I è un ideale intero di D, ma entrambi possono essere non vuoti se I è frazionario. Sia $\mathcal{M}^+(I) = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ e $\mathcal{M}^-(I) = \{N_1, N_2, \ldots, N_m\}$. Segue che

$$ID_I^+ = M_1^{r_1}\cdots M_n^{r_n}D_I^+ \quad \text{e} \quad I^{-1}D_I^- = N_1^{s_1}\cdots N_m^{s_m}D_I^-,$$

per interi positivi r_i e s_j. Inoltre $ID_I^- = N_1^{-s_1}\cdots N_m^{-s_m}D_I^-$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
I &= \bigcap_{P\in\mathrm{Max}(D)} ID_P = \\
&= \left(\bigcap_{P\in\mathcal{M}^0(I)} ID_P\right) \cap \left(\bigcap_{P\in\mathcal{M}^+(I)} ID_P\right) \cap \left(\bigcap_{P\in\mathcal{M}^-(I)} ID_P\right) = \\
&= \left(\bigcap_{P\in\mathcal{M}^0(I)} D_P\right) \cap ID_I^+ \cap ID_I^- = \\
&= \left(\bigcap_{P\in\mathcal{M}^0(I)} D_P\right) \cap M_1^{r_1}\cdots M_n^{r_n}D_I^+ \cap N_1^{-s_1}\cdots N_m^{-s_m}D_I^- = \\
&= \bigcap_{P\in\mathrm{Max}(D)} M_1^{r_1}\cdots M_n^{r_n}N_1^{-s_1}\cdots N_m^{-s_m}D_P = \\
&= M_1^{r_1}\cdots M_n^{r_n}N_1^{-s_1}\cdots N_m^{-s_m}
\end{aligned}$$

Questa rappresentazione è unica in quanto sia M_i che N_j sono ideali massimali per ogni i e j. $\square$

Si osservi che, nel caso specifico di un ideale intero, il lemma precedente afferma che un ideale proprio e finitamente generato I di un dominio almost

Dedekind D è prodotto finito di potenze positive di ideali massimali se e solo se $I \nsubseteq M$, per ogni $M \in \mathcal{M}_{\dagger}(D)$.

Finora abbiamo dunque analizzato i casi in cui, in un dominio almost Dedekind, è possibile fattorizzare un ideale frazionario finitamente generato in potenze (non necessariamente positive) di ideali massimali. Se ora, mantenendo la restrizione agli ideali frazionari finitamente generati, ci proponiamo di generalizzare ulteriormente il problema della fattorizzazione, considerando la possibilità che nella fattorizzazione intervengano, eventualmente, anche ideali non massimali, la domanda che ci poniamo è la seguente:

Dato un dominio almost Dedekind D con $\mathrm{Max}(D) = \{P_\alpha | \alpha \in A\}$, quando è possibile trovare una famiglia di ideali finitamente generati $\mathcal{J} = \{J_\alpha | \alpha \in A\}$ di D tale che $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$, per ogni α, e che ogni ideale frazionario non nullo finitamente generato di D possa essere fattorizzato come prodotto finito di potenze di ideali della famiglia $\mathcal{J}$?

Per un dominio almost Dedekind D con $\mathrm{Max}(D) = \{P_\alpha | \alpha \in A\}$, diciamo che un insieme di ideali finitamente generati $\mathcal{J} := \{J_\alpha | \alpha \in A\}$ è una *famiglia fattorizzante* per D se $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$, per ogni α, e inoltre ogni ideale frazionario non nullo finitamente generato di D può essere fattorizzato come prodotto finito di potenze di ideali della famiglia $\mathcal{J}$. Un *insieme fattorizzante* di un dominio almost Dedekind è una famiglia fattorizzante tale che nessun elemento compaia più di una volta.
Osserviamo che, se D è un dominio almost Dedekind e se P è un ideale massimale di grado sharp n, allora, non solo esiste un ideale finitamente generato I di D tale che P sia l'unico ideale massimale di D che, contemporaneamente, contenga I e sopravviva in D_n, ma si può anche assumere che $ID_P = PD_P$. Infatti, essendo D_P un DVR, PD_P è principale, ovvero $PD_P = (p)D_P$ con $p \in P$. Se ora $I = (a_1, \dots, a_n)$ è un ideale finitamente generato tale che P sia l'unico ideale massimale di D che,contemporaneamente, contenga I e sopravviva in D_n, considerando $J = (a_1, \dots, a_n, p)$, J continua a soddisfare le proprietà di I e in più è tale che $JD_P = PD_P$.
Sotto tale assunzione, inoltre, in D_n si ha $ID_n = PD_n$.

Alla luce di questa osservazione, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 3.2.5. *Sia D un dominio almost Dedekind. Per ogni intero positivo k e ogni primo P_α di grado sharp k, sia J_α un ideale finitamente generato di D tale che $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$ e che P_α sia l'unico ideale massimale di D che, contemporaneamente, contenga J_α e sopravviva in D_k. Se I è un ideale frazionario finitamente generato di grado sharp finito, $I \neq D$, allora I si fattorizza in modo unico come prodotto finito di potenze non nulle di ideali della famiglia $\{J_\alpha\}$. In particolare, gli elementi della famiglia $\{J_\alpha\}$ sono distinti.*

Dimostrazione. Per prima cosa si noti che, se P_α è un primo sharp di D, allora il corrispondente J_α è semplicemente P_α stesso. Infatti, notando che, se P_α è un primo sharp, sia J_α che P_α esplodono in D_2, si ha:

$$\begin{aligned}
J_\alpha = & \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} J_\alpha D_M = \\
& = P_\alpha D_{P_\alpha} \cap \left(\bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D) \setminus \{P_\alpha\}} D_M \right) = \\
& = P_\alpha D_{P_\alpha} \cap \left(\bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D) \setminus \{P_\alpha\}} P_\alpha D_M \right) = \\
& = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(D)} P_\alpha D_M = P_\alpha
\end{aligned}$$

Se invece P_α ha grado sharp k, abbiamo già osservato che $J_\alpha D_k = P_\alpha D_k$.

Mostriamo per prima cosa che gli elementi della famiglia $\{J_\alpha\}$ sono distinti. Siano dunque P_α e P_β ideali massimali distinti di D con P_α di grado sharp finito k. Allora, in D_k, si ha $J_\alpha D_k = P_\alpha D_k$ con $P_\alpha D_k$ ideale massimale di D_k. Quindi l'unico modo per avere che P_β contenga J_α è che P_β scoppi in D_k, in quanto l'unico ideale massimale di D_k che contiene J_α è, per costruzione, $P_\alpha D_k$. In tal caso P_β avrebbe grado sharp $m < k$. Se dunque fosse $J_\alpha D_{P_\beta} = P_\beta D_{P_\beta}$, con $P_\beta D_m$ unico ideale massimale di D_m che contiene J_α (ovvero $J_\alpha = J_\beta$), si avrebbe $J_\alpha D_m = P_\beta D_m$, il che è impossibile essendo $J_\alpha D_m$ contenuto in $P_\alpha D_m$. Ne segue che $J_\alpha \neq J_\beta$. Si ottiene così che se

entrambi P_α e P_β hanno grado finito, allora $J_\alpha \neq J_\beta$.
Inoltre, per ogni α, due potenze distinte di J_α sono distinte ($J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$ e D_{P_α} è un DVR) e $J_\alpha D_n = D_n$ per ogni $n > k$.

Prima dell'esistenza si dimostrerà l'unicità della fattorizzazione. A tale scopo, essendo ognuno dei J_α invertibile, è sufficiente mostrare che non esiste una fattorizzazione non banale di D.
Si assuma che $D = \prod_{m,i} J_{m,i}^{e_{m,i}}$ sia una fattorizzazione finita di D sull'insieme $\{J_\alpha\}$ dove, per ogni i, $J_{m,i}$ ha grado sharp finito m e $e_{m,i}$ è un intero, eventualmente nullo. Sia n il più alto grado sharp tra i fattori. Allora, in D_n, si ha $D_n = \prod_i J_{n,i}^{e_{n,i}} D_n$ dal momento che $J_{m,i}D_n = D_n$, per ogni $m < n$, per ogni i. Poiché $J_{n,i}D_n = P_{n,i}D_n$ è un ideale massimale di D_n, deve essere $e_{n,i} = 0$. Quindi i fattori $J_{n,i}^{e_{n,i}}$ sono tutti superflui. Continuando il procedimento si mostra che $e_{m,i}$ sono tutti nulli.

Per l'esistenza della fattorizzazione ricorreremo all'induzione sul grado sharp di I e al Lemma 3.2.4.
Dal Lemma 3.2.4, se I ha grado sharp uno, I è prodotto di potenze non nulle di un numero finito di primi sharp di D, sia $I = M_1^{e_1} M_2^{e_2} \cdots M_n^{e_n}$.
Ora si assuma che I abbia grado sharp due. Allora ID_2 è un ideale frazionario finitamente generato di D_2 il cui grado sharp, come ideale di D_2, è uno. Il Lemma 3.2.4 garantisce, quindi, che esiste un numero finito di ideali massimali P_1D_2, $P_2D_2, \ldots,$ P_nD_2 di D_2 che contengono localmente ID_2 o $(ID_2)^{-1}$. Quindi in D_2 possiamo fattorizzare ID_2 in modo unico come $P_1^{e_1}P_2^{e_2} \cdots P_n^{e_n} D_2$, dove $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono interi non nulli. Ora, essendo P_1D_2, $P_2D_2, \ldots,$ P_nD_2 primi sharp di D_2 (e quindi, in particolare, $P_1, \ldots, P_n$ sono primi di D di grado sharp due), per ogni i abbiamo un ideale finitamente generato J_i nell'insieme $\{J_\alpha\}$ tale che $J_iD_2 = P_iD_2$. Quindi

$$ID_2 = P_1^{e_1}P_2^{e_2} \cdots P_n^{e_n} D_2 = J_1^{e_1}J_2^{e_2} \cdots J_n^{e_n} D_2.$$

Sia $J = J_1^{e_1}J_2^{e_2} \cdots J_n^{e_n}$. Allora

$$I(D:J)D_2 = (D:J)ID_2 = (D:J)JD_2 = D_2, \tag{3.2}$$

in quanto, essendo finitamente generato, J è invertibile. Poiché sia I che $(D : J)$ sono ideali frazionari finitamente generati di D, $I(D : J)$ è un ideale frazionario di D finitamente generato. Esso, inoltre, ha grado sharp uno da (3.2). Quindi, per il Lemma 3.2.4, esistono ideali massimali $M_1, M_2, \ldots, M_m$ tali che $I(D : J) = M_1^{r_1} M_2^{r_2} \cdots M_m^{r_m}$, con r_i interi non nulli. Quindi $I = I(D : J)J = M_1^{r_1} M_2^{r_2} \cdots M_m^{r_m} J_1^{e_1} J_2^{e_2} \cdots J_n^{e_n}$.
Ora si assuma che esista una siffatta fattorizzazione per ogni ideale frazionario finitamente generato di grado sharp minore o uguale di k (in ogni dominio almost Dedekind). Sia I un ideale frazionario finitamente generato di D che abbia grado sharp $k + 1$. Allora ID_2 è un ideale frazionario finitamente generato di D_2 che ha grado sharp k. Quindi ID_2 si fattorizza in un prodotto finito, ovvero $ID_2 = J_1^{e_1} J_2^{e_2} \cdots J_n^{e_n} D_2$. Per completare la dimostrazione è semplicemente sufficiente ripetere i passi utilizzati precedentemente nel caso di un ideale di grado sharp 2. Vale a dire, porre $J = J_1^{e_1} J_2^{e_2} \cdots J_n^{e_n}$ e fattorizzare l'ideale frazionario $I(D : J)$ sui primi sharp di D. Questo garantisce l'esistenza della fattorizzazione. □

Dal teorema precedente si può facilmente dedurre il seguente corollario.

Corollario 3.2.6. *Sia D un dominio almost Dedekind tale che ogni ideale primo abbia grado sharp finito. Allora esiste un insieme fattorizzante $\mathcal{J}$ tale che ogni ideale frazionario finitamente generato di D si fattorizzi in modo unico su $\mathcal{J}$. In particolare, ogni dominio almost Dedekind di grado sharp finito possiede un insieme fattorizzante.*

Tale corollario generalizza, dunque, alcune delle classiche proprietà dei domini di Dedekind sulla fattorizzazione di ideali a quei domini almost Dedekind che risultano particolarmente vicini ai domini di Dedekind; nello specifico si tratta di domini almost Dedekind in cui ogni ideale massimale ha grado sharp finito (notiamo infatti che un dominio di Dedekind è un dominio almost Dedekind in cui tutti gli ideali massimali hanno grado sharp uno). Tuttavia, si è visto come, in questa generalizzazione, si è costretti a rinunciare alla possibilità di utilizzare, nella fattorizzazione, sempre e solo potenze positive e in più in essa possono comparire anche ideali non necessariamente massimali.

Capitolo 4

Costruzioni di domini almost Dedekind

I più semplici esempi di domini almost Dedekind sono dati dagli anelli di interi algebrici in estensioni algebriche di grado finito dei numeri razionali. In realtà questi sono "esempi speciali", in quanto sono in particolare domini di Dedekind e quindi noetheriani. Più difficile è dare esempi di domini almost Dedekind non banali, ovvero di domini almost Dedekind non noetheriani.

Il primo esempio di dominio almost Dedekind che non fosse Dedekind era già stato dato da Nakano nel 1953 in *"Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper"* [25], ancor prima che Gilmer avesse coniato il termine *almost Dedekind* e ne avesse dato una definizione astratta che non avesse nulla a che fare con gli anelli di interi algebrici.
Nakano aveva focalizzato la sua attenzione sulle proprietà degli anelli di interi algebrici in estensioni algebriche di grado infinito dei numeri razionali. Tali domini sono sempre domini di Prüfer di dimensione uno, ma non domini almost Dedekind in generale; in essi, infatti, possono esistere ideali primi idempotenti. Ad esempio la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ nel campo $\mathbb{A}$ dei numeri algebrici è un dominio di Prüfer di dimensione uno in cui tutti gli ideali primi sono idempotenti. Quest'ultima proprietà discende dal fatto che $\mathbb{A}$ è un campo algebricamente chiuso e dalla seguente proposizione.

Proposizione 4.0.1. *Sia D un dominio integralmente chiuso il cui campo dei quozienti K sia algebricamente chiuso. Se J è un ideale di D tale che* $\mathrm{rad}(J) = J$*, allora J è idempotente.*

Dimostrazione. Mostriamo che $J^2 = J$, facendo vedere che $J \subseteq J^2$. Sia, dunque, $a \in J$ e sia $b \in K$ una radice del polinomio $X^2 - a = 0$ (b esiste poiché K è algebricamente chiuso). Inoltre b è intero su D, e quindi, essendo D integralmente chiuso, $b \in D$. Ora $b^2 = a \in J$, da cui $b \in \mathrm{rad}(J) = J$. Ne concludiamo che $a = b^2 \in J^2$. □

Nakano considerò, allora, il problema di determinare quando un ideale di D è idempotente, se D è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in un campo infinito di numeri algebrici (i suoi principali risultati sono contenuti in [26], e sono poi stati generalizzati da Arnold e Gilmer in [1] a un qualsiasi dominio di Prüfer). In particolare il suo lavoro consistette nello studio di quelle estensioni infinite del campo dei numeri razionali, nelle quali la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ non presentasse ideali idempotenti. A tale scopo egli considerò un campo K che fosse unione di una catena ascendente $\{K_\alpha\}$ di estensioni di grado finito del campo dei numeri razionali tale che, denotando con D_α la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K_α, le seguenti due condizioni fossero soddisfatte per ogni primo $p \in \mathbb{Q}$:

1. per α sufficientemente grande, tutti gli ideali primi $P_{\alpha_1}, \dots, P_{\alpha_{\lambda_\alpha}}$ che fattorizzano p in D_α non ramificano in $D_{\alpha+1}$;

2. per ogni α esite $\beta > \alpha$ tale che P_{α_i} si decomponga in D_β, per ogni $i = 1, \dots, \lambda_\alpha$.

Nakano osservò che un campo K che soddisfi tali condizioni gode di interessanti proprietà. Ad esempio, se D è l'anello degli interi algebrici di K, nessun ideale proprio I di D è idempotente e un ideale Q è un ideale P-primario se e solo se Q è una potenza di P. Si noti come, per quanto visto nel Capitolo 1, ciascuna di queste due proprietà caratterizza, nell'ambito dei domini di Prüfer di dimensione uno, i domini almost Dedekind.

Inoltre egli mostrò che esistono campi di questo tipo e che un esempio poteva essere ottenuto aggiungendo al campo dei numeri razionali le radici p-esime dell'unità, per ogni primo p (vedi il Paragrafo 4.1.2).

A partire dall'esempio di Nakano, sono tanti i matematici che si sono interessati alle tecniche di costruzione di domini almost Dedekind. All'interno di questo capitolo analizzeremo accuratamente due tecniche che riguardano le estensioni infinite (Sezione 4.1) e una tecnica che concerne gli anelli di semigruppo (Sezione 4.2). Tramite una di esse, forniremo anche esempi concreti di domini almost Dedekind non notheriani. Accenneremo poi, brevemente, ad altre tecniche di costruzione che si incontrano nella letteratura, alcune delle quali forniscono ulteriori esempi di domini almost Dedekind non Dedekind.

4.1 Estensioni infinite

4.1.1 Unione di una catena di domini di Dedekind

Esistono diverse costruzioni che hanno a che fare con estensioni infinite, le quali seguono tutte dal seguente schema generale, fornito da Loper e Lucas in [24].

Teorema 4.1.1. *Sia $D_1 \subseteq D_2 \subseteq \cdots$ una catena di domini di Dedekind che soddisfi ciascuna delle seguenti proprietà:*

1. *Per $i < j$, ogni ideale massimale di D_i sopravvive in D_j.*
2. *Ogni ideale massimale di D_j si contrae su un ideale massimale di D_1.*
3. *Se M' è un ideale massimale di D_j e $M = M' \cap D_1$ allora $M(D_j)_{M'} = M'(D_j)_{M'}$.*

Allora il dominio $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_n$ è un dominio almost Dedekind.

Dimostrazione. Per ogni n, denotiamo con K_n il campo dei quozienti di D_n. Sia M un ideale massimale di D e sia $M_i = M \cap D_i$. Chiaramente esiste i tale che $M_i \neq (0)$, altrimenti $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = (0)$. Dal punto 2 segue che $M_i \neq (0)$ per ogni i.
Sia $\frac{r}{s} \in MD_M$ con $r \in M$ e $s \in D \setminus M$. Allora, per come è definito D, esiste i per cui $r, s \in D_i$. Quindi $r \in M \cap D_i = M_i$ e $s \in D_i \setminus M_i$. Ne segue che

$\frac{r}{s} \in M_i(D_i)_{M_i}$. Osservando che $M_1 = M_i \cap D_1$, dall'ipotesi 3 del teorema si ha che $M_i(D_i)_{M_i} = M_1(D_i)_{M_i}$. Quindi esiste $b \in M_1$ e $t \in D_i \setminus M_i$ tale che $\frac{b}{t} = \frac{r}{s}$. In particolare $t \notin M$; ne segue che $\frac{r}{s} = \frac{b}{t} \in M_1 D_M$. Viceversa è chiaro che $M_1 D_M \subseteq M D_M$. Se ne deduce che $M D_M = M_1 D_M$. Ora D_1 è un dominio di Dedekind, da cui $M_1(D_1)_{M_1}$ è principale. Otteniamo quindi che $M D_M = M_1 D_M = M_1(D_1)_{M_1} D_M$ è principale ed è inoltre di altezza uno. Se ne conclude che D_M è un DVR, per ogni ideale massimale M di D, e, conseguentemente, che D è un dominio almost Dedekind. $\square$

La maggior parte delle prime costruzioni di domini almost Dedekind non noetheriani furono ottenute utilizzando il metodo illustrato nel Teorema 4.1.1, nel caso in cui D_i fosse intero su D_{i-1}, per ogni $i \geq 2$.
Successivamente, nel 1997, Loper diede in *"Another Prüfer ring of integer-valued polynomials"* [20] un ulteriore esempio di costruzione di un'estensione infinita utilizzando il metodo del Teorema 4.1.1 con D_{i+1} sopra-anello di $D_i[X_i]$ (dove X_i è una variabile). L'idea è quella di trovare, per ogni ideale massimale $M \subseteq D_i$, un numero finito di sopra-anelli di valutazione noetheriani di $D_i[X_i]$, con ideali massimali centrati in M. Quindi si denota con D_{i+1} l'intersezione dei sopra-anelli di valutazione noetheriani che corrispondono a tutti gli ideali massimali di D_i; tuttavia bisogna assicurare che D_{i+1} sia un dominio di Dedekind, ad esempio facendo in modo che D_i sia un'intersezione di un numero finito di domini di valuzione noetheriani.
Nel 2003 Loper e Lucas in [24] utilizzarono il Teorema 4.1.1 per dare ulteriori esempi di domini almost Dedekind, tramite i quali giunsero a dimostrare che per ogni intero $k \geq 1$ esiste un dominio almost Dedekind di grado dull k.

4.1.2 Unione di una rete di domini almost Dedekind

La presente costruzione fu data da Arnold e Gilmer nel loro articolo del 1967 "*Idempotent ideals and unions of nets of Prüfer domains*" [1]. Essa, in particolare, sarà utile per fornire, successivamente, esempi non banali di domini almost Dedekind.
Il risultato principale di questo paragrafo, contenuto nel Corollario 4.1.5, deve essere preceduto dall'introduzione di una ulteriore notazione e da alcuni

risultati intermedi.

Sia D_0 un dominio almost Dedekind con campo dei quozienti K_0 e sia K un'estensione algebrica di campo di K_0 che sia espressa come unione di una rete $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di campi intermedi, ognuno dei quali sia finito su K_0 (con il termine *rete* intendiamo che per ogni $\alpha, \beta \in A$ esiste un elemento γ di A tale che K_α e K_β sono sottocampi di K_γ):

$$K = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha.$$

Assumiamo inoltre che $K_0 \in \{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Per ogni $\alpha \in A$, denotiamo con D_α la chiusura integrale di D_0 in K_α. Si osservi che, per il Teorema 1.0.7, ogni D_α è un dominio almost Dedekind. Poniamo

$$D = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha.$$

Allora D è la chiusura integrale di D_0 in K e $D \cap K_\alpha = D_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$. Si osservi inoltre che, per il Teorema 1.0.6, D è un dominio di Prüfer di dimensione uno. Allora, per il Teorema 1.0.4, D sarà un dominio almost Dedekind se e solo se D non contiene ideali massimali idempotenti.

Sia ora P un ideale primo di D; definiamo, per ogni $\alpha \in A$, $P_\alpha = P \cap D_\alpha$. Chiaramente P_α si contrae su P_0. Per ogni $\alpha \in A$, associeremo a P_α un intero positivo e_α definito come segue. Se $V_\alpha := (D_\alpha)_{P_\alpha}$, allora, essendo V_α un DVR, l'ideale $P_0 V_\alpha$ è una potenza di $P_\alpha V_\alpha$: $P_0 V_\alpha = (P_\alpha V_\alpha)^{e_\alpha}$. Notiamo che se $K_\alpha \subseteq K_\beta$ allora P_β si contrae su P_α, da cui V_β estende V_α; in tal caso quindi si ha $e_\alpha \leq e_\beta$.
Equivalentemente, l'intero e_α può essere messo in relazone con la fattorizzazione di $P_0 D_\alpha$ in D_α. Infatti si osservi che, per ogni $\alpha \in A$, essendo K_α un'estensione finita di K_0, esistono solo un numero finito di ideali massimali di D_α che si contraggono su P_0 e P_α è uno di questi. Dalla Proposizione 3.2.3 segue allora che $P_0 D_\alpha$ è prodotto finito di potenze degli ideali massimali di D_α che contengono P_0. Allora e_α rappresenta l'esponente di P_α come fattore di $P_0 D_\alpha$.

Lemma 4.1.2. *Mantenendo la notazione appena introdotta, sia I un ideale di D e α un elemento fissato di A. Poniamo $B := \{\beta \in A | K_\alpha \subseteq K_\beta\}$ e, per ogni $\beta \in B$, sia $I_\beta := I \cap D_\beta$.*

(a) Se k è un intero positivo, allora $I^k = \bigcup_{\beta \in B} {I_\beta}^k$.

(b) Se per ogni $\beta \in B$ esiste $\gamma \in B$ tale che $I_\beta \subseteq {I_\gamma}^2$, allora I è idempotente.

Dimostrazione.

(a) Il contenimento $\bigcup_{\beta \in B} {I_\beta}^k \subseteq I^k$ è chiaro poiché $I_\beta \subseteq I$ per ogni $\beta \in B$. Viceversa, se $x \in I^k$, allora $x \in J^k$ per qualche ideale J finitamente generato e contenuto in I. Allora esiste $\beta \in B$ tale che $J \subseteq D_\beta$, da cui $J \subseteq I \cap D_\beta = I_\beta$. Quindi $x \in J^k \subseteq {I_\beta}^k \subseteq \bigcup_{\beta \in B} {I_\beta}^k$.

(b) Si osservi che in tale ipotesi si ha $\bigcup_{\beta \in B} {I_\beta}^2 \supseteq \bigcup_{\beta \in B} I_\beta$; allora, applicando il punto (a), si ottiene:

$$I^2 = \bigcup_{\beta \in B} {I_\beta}^2 \supseteq \bigcup_{\beta \in B} I_\beta = \bigcup_{\beta \in B} I \cap D_\beta = I \cap \left(\bigcup_{\beta \in B} D_\beta \right) = I \cap D = I.$$

□

Proposizione 4.1.3. *Sia P un ideale primo di D. Allora P è idempotente se e solo se, per ogni $\alpha \in A$, esiste un elemento β di A tale che $K_\alpha \subseteq K_\beta$ e $P_\alpha \subseteq {P_\beta}^2$.*

Dimostrazione. Il Lemma 4.1.2 mostra che, se vale la condizione della proposizione, allora P è idempotente.
Viceversa, supponiamo che la condizione della proposizione sia falsa e mostriamo che, in tal caso, P non è idempotente. Esiste dunque un elemento $\alpha \in A$ tale che, se $B = \{\beta \in A | K_\alpha \subseteq K_\beta\}$, allora, per ogni $\beta \in B$, si ha $P_\alpha \nsubseteq {P_\beta}^2$. Per la parte ($a$) del Lemma 4.1.2, $P^2 = \bigcup_{\beta \in B} {P_\beta}^2$. Per mostrare che $P \supsetneq P^2$ è dunque sufficiente mostrare che esiste un fissato elemento di P_α che non appartenga a ${P_\beta}^2$, per ogni $\beta \in B$. Per agevolare la notazione poniamo, come sopra, $V_\alpha := (D_\alpha)_{P_\alpha}$. Essendo D_α un dominio almost Dedekind, l'ideale $P_\alpha V_\alpha$ è principale ed è generato da un elemento

$x \in P_\alpha \setminus {P_\alpha}^2$. Si osservi che, poiché $K_\alpha \subseteq K_\beta$, V_β estende V_α. Inoltre P_β non è idempotente e $P_\alpha \nsubseteq {P_\beta}^2$. Conseguentemente,

$$xV_\beta = xV_\alpha V_\beta = P_\alpha V_\alpha V_\beta = P_\alpha V_\beta \nsubseteq {P_\beta}^2 V_\beta.$$

Quindi $x \notin {P_\beta}^2 V_\beta$, da cui $x \notin {P_\beta}^2$. Ne concludiamo che $x \in P \setminus P^2$ e che, quindi, P non è idempotente. $\square$

Teorema 4.1.4. *Sia P un ideale primo di D. Allora P è idempotente se e solo se l'insieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è illimitato.*

Dimostrazione. Se P è idempotente, allora, per la Proposizione 4.1.3, per ogni $\alpha \in A$, esiste un elemento β di A tale che $K_\alpha \subseteq K_\beta$ e $P_\alpha \subseteq {P_\beta}^2$. In particolare è quindi possibile costruire una successione $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ di elementi di A tali che $K_{\alpha_i} \subseteq K_{\alpha_{i+1}}$ per ogni i e tali che $e_{\alpha_{i+1}} \geq 2e_{\alpha_i}$ per ogni i. Ne segue che $\{e_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ e, conseguentemente $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$, è illimitato.
Viceversa, se P non è idempotente, per la Proposizione 4.1.3, esiste un elemento $\alpha \in A$ tale che per ogni $\beta \in A$ con $K_\alpha \subseteq K_\beta$, $P_\alpha \nsubseteq {P_\beta}^2$. Allora, come nella dimostrazione della Proposizione 4.1.3, $P_\alpha V_\beta \nsubseteq {P_\beta}^2 V_\beta$ e quindi, essendo V_β un DVR, $P_\alpha V_\beta = P_\beta V_\beta$. Ne segue che

$${P_\beta}^{e_\alpha} V_\beta = {P_\alpha}^{e_\alpha} V_\beta = {P_\alpha}^{e_\alpha} V_\alpha V_\beta = P_0 V_\alpha V_\beta = P_0 V_\beta.$$

Se ne deduce che $e_\alpha = e_\beta$ per ogni $\beta \in A$ tale che $K_\alpha \subseteq K_\beta$. Ora se γ è un qualsiasi elemento di A, esiste, per definizione di rete, un elemento β di A tale che $K_\gamma \cup K_\alpha \subseteq K_\beta$. Quindi $e_\gamma \leq e_\beta = e_\alpha$, ovvero $\{e_\gamma\}_{\gamma \in A}$ è limitato da e_α. $\square$

Corollario 4.1.5. *D è un dominio almost Dedekind se e solo se per ogni ideale massimale P di D, l'insieme $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è limitato.*

Dimostrazione. La tesi discende immediatamente dal Teorema 4.1.4, ricordando che un dominio di Prüfer di dimensione uno è un dominio almost Dedekind se e solo se è privo di ideali massimali idempotenti. $\square$

In conclusione, ogni estensione intera di un dominio almost Dedekind in un ampliamento algebrico del suo campo dei quozienti è un dominio di Prüfer di dimensione uno (Teorema 1.0.6). Per ottenere un dominio almost Dedekind, la parte difficile è assicurare che le localizzazioni siano DVR. La chiave, per quanto visto, è dunque quella di prestare attenzione alla ramificazione.

Esempi di domini almost Dedekind non noetheriani

I seguenti esempi, tratti rispettivamente da [10, §42] e da [25, §1], rappresentano la costruzione di un dominio almost Dedekind tramite la tecnica della "unione di una rete di domini almost Dedekind", analizzata precedentemente. La peculiarità di tali esempi risiede nel fatto che, a partire da un dominio di Dedekind, quale $\mathbb{Z}$, si costruisce un'estensione algebrica infinita F di $\mathbb{Q}$ tale che la chiusura integrale $\mathbb{Z}^*$ di $\mathbb{Z}$ in F sia un dominio almost Dedekind non banale, ovvero che non sia un domino di Dedekind.

Allo scopo di comprendere totalmente la costruzione è necessario richiamare alcune definizioni e fornire alcuni risultati intermedi.
Richiamiamo innanzitutto che se D è un dominio di Dedekind con campo dei quozienti K e se F è un'estensione finita di K, allora la chiusura integrale D^* di D in F è un dominio di Dedekind per il Teorema 1.0.7. Quindi, se P è un ideale massimale di D, PD^* è prodotto di ideali massimali di D^*. Sia

$$PD^* = M_1^{e_1} \cdots M_r^{e_r},$$

dove gli ideali massimali M_i di D^* sono tutti distinti. L'intero e_i è detto *indice di ramificazione* di M_i su P e il grado

$$f_i := \left[\frac{D^*}{M_i} : \frac{D}{P}\right]$$

è detto *grado relativo* di M_i su P. E' facile convincersi che e_i e f_i così definiti sono uguali all'indice di ramificazione e al grado relativo del DVR ${D^*}_{M_i}$ sul DVR D_P definiti nel Teorema 0.0.8. Vale allora:

$$\sum_{i=1}^{r} e_i f_i \leq [F : K] \tag{4.1}$$

e quindi, in particolare, f_i è finito per ogni i.
Se PD^* è massimale in D^*, diciamo che P è *inerte* in D^*; se esiste i tale che $e_i > 1$, diciamo che P è *ramificato* in D^*; infine, se $r > 1$ e, per ogni i, $e_i = 1$, diciamo che P è *decomposto* in D^*.
Useremo questa notazione e questa terminologia nei risultati successivi.

Lemma 4.1.6. *Sia D un dominio e sia $\{A_i\}_{i=1}^n$ un insieme di ideali di D, a coppie coprimi. Se $\{f_i\}_{i=1}^n$ è un sottoinsieme finito di $D[X]$, con f_i*

monico di grado k, allora esiste $f \in D[X]$, f monico di grado k, tale che $f \equiv f_i(A_i[X])$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Dimostrazione. Procederemo per induzione su n. Per $n = 2$, essendo A_1 e A_2 coprimi, possiamo scegliere $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ tali che $a_1 + a_2 = 1$. Quindi, se $f = a_2 f_1 + a_1 f_2$, f è monico di grado k e vale che:

$$f - f_1 = (a_2 - 1)f_1 + a_1 f_2 = a_1(f_2 - f_1) \in A_1[X],$$

e

$$f - f_2 = a_2 f_1 + (a_1 - 1)f_2 = a_2(f_1 - f_2) \in A_2[X].$$

Quindi

$$f \equiv f_1(A_1[X]) \quad \text{e} \quad f \equiv f_2(A_2[X]).$$

Supponiamo ora che esista un polinomio monico g di grado k tale che $g \equiv f_i(A_i[X])$ per $1 \leq i \leq n-1$. Poiché anche $A_1 \cdots A_{n-1}$ e A_n sono coprimi, per il caso $n = 2$, esiste un polinomio monico f di grado k tale che

$$f \equiv g(A_1 \cdots A_{n-1}[X]) \quad \text{e} \quad f \equiv f_n(A_n[X]).$$

Conseguentemente, $f \equiv f_i(A_i[X])$ per ogni $1 \leq i \leq n$. □

Proposizione 4.1.7. *Sia D un dominio di Dedekind con campo dei quozienti K e siano $\{P_i\}_{i=1}^r, \{Q_i\}_{i=1}^s$, e $\{U_i\}_{i=1}^t$, $r \geq 1$, tre collezioni di ideali massimali distinti di D, tali che i campi residui D/P_i, D/Q_i e D/U_i siano tutti finiti. Allora esiste un'estensione quadratica semplice $K(\alpha)$ di K, tale che α sia intero su D e ogni P_i sia inerte in D^*, ogni Q_i ramifichi in D^* e ogni U_i si decomponga in D^* (D^* denota qui la chiusura integrale di D in $K(\alpha)$).*

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \ldots, r$, D/P_i è un campo finito e

$$\frac{D[X]}{P_i[X]} \cong \frac{D}{P_i}[X];$$

ne segue che esiste un polinomio monico g_i in $D[X]$ di grado 2 tale che g_i sia irriducibile modulo $P_i[X]$.
Per ogni $i = 1, \ldots, s$ si scelga un elemento q_i in $Q_i \setminus Q_i^2$ (Q_i è non idempotente).

Poiché gli ideali $\{P_i\}_{i=1}^r, \{Q_i\}_{i=1}^s$, e $\{U_i\}_{i=1}^t$ sono a coppie coprimi, per il Lemma 4.1.6, esiste un polinomio monico f in $D[X]$ di grado 2 tale che:

$$f \equiv g_i\,(P_i[X]),\ 1 \leq i \leq r; \tag{4.2}$$

$$f \equiv X^2 + q_i\,(Q_i^2[X]),\ 1 \leq i \leq s; \tag{4.3}$$

$$f \equiv X(X+1)\,(U_i[X]),\ 1 \leq i \leq t. \tag{4.4}$$

Sia dunque α una radice di f in un'estensione di K; si noti che, essendo f monico e irridicibile modulo $P_1[X]$, f è anche irriducibile in $D[X]$ e dunque in $K[X]$, essendo D integralmente chiuso. Quindi $K(\alpha)$ è un'estensione quadratica di K.
Sia D^* la chiusura integrale di D in $K(\alpha)$. Si mostrerà che ogni P_i, Q_i e U_i è rispettivamente inerte, ramificato e decomposto in D^*.

Si ricorda che il nucleo dell'omomorfismo canonico da $D[X]$ in $D[\alpha]$, $\{g \in D[X] : g(\alpha) = 0\}$, è l'ideale principale generato da f; dalle proprietà elementari degli isomorfismi di anelli segue che per ogni ideale massimale P di D si ha:

$$\begin{aligned} \frac{D[\alpha]}{P[\alpha]} &\cong \frac{D[X]/(f)}{(P[X]+(f)/(f))} \cong \frac{D[X]}{P[X]+(f)} \cong \\ &\cong \frac{D[X]/P[X]}{(P[X]+(f))/P[X]} \cong \frac{(D/P)[X]}{(\overline{f})} \end{aligned} \tag{4.5}$$

dove $\overline{f}$ denota l'immagine di f in $D/P[X]$.
Analizzaremo ora separatemente i casi in cui $P = P_i$, $P = Q_i$, $P = U_i$.

Se $P = P_i$, $\overline{f}$ è irriducibile in $(D/P_i)[X]$ e ha grado 2, da cui $(D/P_i)[X]/(\overline{f})$ è un'estensione di grado 2 di D/P_i. Allora, da (4.5), $P_i[\alpha]$ è massimale in $D[\alpha]$ e

$$\left[\frac{D[\alpha]}{P_i[\alpha]} : \frac{D}{P_i}\right] = 2. \tag{4.6}$$

Se $P = Q_i$, allora $\overline{f} = X^2$, da cui $(D/Q_i)[X]/(\overline{f})$ ha un unico ideale massimale, generato da $X + (\overline{f})$, immagine di X in $(D/Q_i)[X]/(\overline{f})$, tale che $(X + (\overline{f}))^2 = 0$. Ne segue che $H_i = Q_i[\alpha] + (\alpha)$ è massimale in $D[\alpha]$ e che $H_i^2 \subseteq Q_i[\alpha]$. Mostriamo che $Q_i[\alpha] \subseteq H_i^2$. A tale scopo, è sufficiente mostrare che $Q_i \subseteq H_i^2 = Q_i^2[\alpha] + \alpha Q_i[\alpha] + (\alpha^2)$. Per la scelta di q_i ($q_i \in Q_i \setminus Q_i^2$),

$Q_i = Q_i^2 + (q_i)$ per il Corollario 1.0.2, essendo D, in particolare, un dominio almost Dedekind. Essendo chiaro che $Q_i^2 \subseteq H_i^2$, basta mostrare che $q_i \in H_i^2$. Dunque, sia $f(X) = X^2 + ax + b$; poiché $f \equiv X^2 + q_i(Q_i^2[X])$, deve essere $a \in Q_i^2$ e $b - q_i \in Q_i^2$. Si ottiene $b = -\alpha^2 - a\alpha \in (\alpha^2) + \alpha Q_i^2[\alpha] \subseteq H_i^2$ e $b - q_i \in Q_i^2 \subseteq H_i^2$. Dunque $q_i = b - (b - q_i) \in H_i^2$ da cui $Q_i[\alpha] = H_i^2$.

Infine, se $P = U_i$, $\overline{f} = X(X+1)$ da cui $(D/U_i)[X]/(\overline{f})$ ha esattamente due ideali massimali, rispettivamente generati da $X + (\overline{f})$ e $X + 1 + (\overline{f})$. Ne segue che esistono due ideali massimali distinti $I_i^{(1)}$ e $I_i^{(2)}$ di $D[\alpha]$ contenenti $U_i[\alpha]$.

Se ora P è un ideale massimale di D e se $PD^* = M_1^{e_1} \cdots M_h^{e_h}$, da (4.1), deve essere

$$\sum_{i=1}^{h} e_i f_i \leq [K(\alpha) : K] = 2,$$

dove

$$f_i := \left[\frac{D^*}{M_i} : \frac{D}{P}\right].$$

Allora, per dimostrare che ogni P_i è inerte in D^*, è sufficiente mostrare che esiste un ideale massimale M_i di D^* che si contrae su P_i tale che

$$\left[\frac{D^*}{M_i} : \frac{D}{P_i}\right] \geq 2;$$

per mostrare che ogni U_i si decompone in D^* sarà sufficiente far vedere che U_i è contenuto in due ideali massimali distinti di D^*; infine, per mostrare che ogni Q_i è ramificato in D^* basta mostrare che ogni Q_i è contenuto nel quadrato di un ideale massimale di D^*.

Poiché α è intero su D, $D[\alpha] \subseteq D^*$ da cui, per il teorema del lying over, esistono ideali massimali $\{M_i\}_{i=1}^r$, $\{N_i\}_{i=1}^s$ e $\{R_i^{(j)}\}_{i=1,\dots,t,\, j=1,2}$ di D^* tali che $M_i \cap D[\alpha] = P[\alpha]$, per $i = 1, \dots, r$, $N_i \cap D[\alpha] = H_i$, per $i = 1, \dots, s$ e $R_i^{(j)} \cap D[\alpha] = I_i^{(j)}$, per $i = 1, \dots, s$, $j = 1, 2$.

Se ne conclude che U_i è decomposto per ogni $i = 1, \dots, t$, perché contenuto in $R_i^{(1)}$ e $R_i^{(2)}$; Q_i è ramificato per ogni $i = 1, \dots, s$, poiché $Q_i \subseteq H_i^2 \subseteq N_i^2$; infine P_i è inerte per ogni $i = 1, \dots, r$ poiché, essendo

$$\frac{D}{P_i} \subseteq \frac{D[\alpha]}{P_i[\alpha]} \subseteq \frac{D^*}{M_i},$$

da (4.6) si ha:

$$\left[\frac{D^*}{M_i}:\frac{D}{P_i}\right]=\left[\frac{D^*}{M_i}:\frac{D[\alpha]}{P_i[\alpha]}\right]\left[\frac{D[\alpha]}{P_i[\alpha]}:\frac{D}{P_i}\right]=2\left[\frac{D^*}{M_i}:\frac{D[\alpha]}{P_i[\alpha]}\right]\geq 2.$$

□

A questo punto, siamo provvisti di tutti gli strumenti che ci permetteranno di costruire domini almost Dedekind non noetheriani.

Esempio 1. Sia $\{p_i\}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$. Per il Teorema 4.1.7 esiste un intero algebrico α_1 di grado 2 su $\mathbb{Q}$ tale che (p_1) si decomponga in Z_1, la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $F_1=\mathbb{Q}(\alpha_1)$ (si osservi che, per il Teorema 1.0.7, Z_1 è un dominio di Dedekind, essendo $[F_1:\mathbb{Q}]=2$). Si assuma che

$$p_1Z_1=M_1^{(1)}M_2^{(1)},$$

dove $M_1^{(1)}$ e $M_2^{(1)}$ sono ideali primi distinti di Z_1.
Nuovamente, allora, per il Teorema 4.1.7, è possibile scegliere un intero algebrico α_2 tale che α_2 abbia grado 2 su F_1, tale che $M_1^{(1)}$ e ogni primo Q di Z_1 che si contrae su (p_2) in $\mathbb{Z}$ siano inerti in Z_2 e tale che $M_2^{(1)}$ si decomponga in Z_2, dove Z_2 denota la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $F_2=F_1(\alpha_2)$.
In particolare

$$M_1^{(1)}Z_2=M_1^{(2)}\quad \text{e}\quad M_2^{(1)}Z_2=M_2^{(2)}M_3^{(2)},$$

con $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$ e $M_3^{(2)}$ ideali primi distinti di Z_2.
Mostriamo che $\{M_1^{(2)},M_2^{(2)},M_3^{(2)}\}$ è esattamente l'insieme degli ideali primi di Z_2 che si contraggono su (p_1) in $\mathbb{Z}$.
Si osservi per prima cosa che:

$$p_1Z_2=p_1Z_1Z_2=M_1^{(1)}M_2^{(1)}Z_2=M_1^{(1)}Z_2M_2^{(1)}Z_2=M_1^{(2)}M_2^{(2)}M_3^{(2)}\qquad(4.7)$$

Da (4.7) segue che $M_i^{(2)}$ divide p_1Z_2 per $i=1,2,3$. Ciò implica che $p_1Z_2\subseteq M_i^{(2)}$, da cui $p_1\in M_i^{(2)}$ per $i=1,2,3$. Se $M_i^{(2)}\cap\mathbb{Z}=q\mathbb{Z}$, allora $p_1\in q\mathbb{Z}$ da cui $p_1=q$.
Supponiamo ora che esista un ideale primo M in Z_2 tale che $M\cap\mathbb{Z}=p_1\mathbb{Z}$. Allora $p_1\in M$, da cui $p_1Z_2\subseteq M$. Essendo Z_2 un dominio di Dedekind,

ciò è equivalente al fatto che M divide $p_1 Z_2$. Allora, da (4.7) e dall'unicità della fattorizzazione nei domini di Dedekind, segue chiaramente che $M \in \{M_1^{(2)}, M_2^{(2)}, M_3^{(2)}\}$.

Procedendo per induzione, si assuma ora che gli interi algebrici $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ siano stati scelti in modo che, se $F_i = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ e se Z_i è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in F_i per ogni $i = 1, \ldots, k$, le seguenti condizioni siano soddisfatte:

1. $[F_{i+1} : F_i] = 2$ per $1 \leq i \leq k-1$.

2. Esistono esattamente $i+1$ ideali primi distinti di Z_i, $\{M_j^{(i)}\}_{j=1}^{i+1}$, che si contraggono su (p_1) in $\mathbb{Z}$. Inoltre, $\forall\, j < i+1$, $M_j^{(i)}$ è inerte in Z_{i+1}:

$$M_j^{(i)} Z_{i+1} = M_j^{(i+1)}$$

e $M_{i+1}^{(i)}$ si decompone in Z_{i+1}:

$$M_{i+1}^{(i)} Z_{i+1} = M_{i+1}^{(i+1)} M_{i+2}^{(i+1)}.$$

Queste condizioni valgono per ogni $i = 1, \ldots, k-1$.

3. Ogni ideale primo di Z_i che si contrae su uno dei seguenti ideali primi di $\mathbb{Z}$: (p_2), (p_3), $\ldots, (p_{i+1})$, è inerte in Z_{i+1} per $1 \leq i \leq k-1$.

Si osservi che l'unione di $\{M_j^{(k)}\}_{j=1}^{k+1}$ e dell'insieme degli ideali massimali di Z_k che si contraggono su uno degli ideali primi (p_2), (p_3), $\ldots, (p_{k+1})$ di $\mathbb{Z}$ è un insieme finito di ideali primi del dominio di Dedekind Z_k, ognuno di indice finito in Z_k.
Ora, per il Teorema 4.1.7, esiste un intero algebrico α_{k+1} di grado 2 su F_k tale che, se Z_{k+1} è la chiusura intera di Z_k in $F_{k+1} = F_k(\alpha_{k+1})$, ogni $M_j^{(k)}$, per $1 \leq j \leq k$, e ogni ideale massimale di Z_k che si contrae sugli ideali primi (p_2), (p_3), $\ldots, (p_{k+1})$ di $\mathbb{Z}$ sia inerte in Z_{k+1}, mentre $M_{k+1}^{(k)}$ si decomponga in Z_{k+1}.
In particolare se poniamo

$$M_j^{(k)} Z_{k+1} = M_j^{(k+1)}, \quad \text{per } 1 \leq j \leq k$$

e

$$M_{k+1}^{(k)} Z_{k+1} = M_{k+1}^{(k+1)} M_{k+2}^{(k+1)},$$

mostriamo che $\{M_j^{(k+1)}\}_{j=1}^{k+2}$ è esattamente l'insieme dei $k+2$ ideali massimali di Z_{k+1} che si contraggono su (p_1) in $\mathbb{Z}$. Chiaramente $M_j^{(k+1)}$ si contrae su (p_1) in $\mathbb{Z}$ per ogni $j = 1, \ldots, k+2$. D'altro canto, sia M un ideale massimale di Z_{k+1} che si contrae su (p_1) in $\mathbb{Z}$; allora M deve contrarsi su un ideale massimale di Z_k che si contrae su (p_1) in $\mathbb{Z}$; infatti $(M \cap Z_k) \cap \mathbb{Z} = M \cap (Z_k \cap \mathbb{Z}) = M \cap \mathbb{Z} = (p_1)$. Detto equivalentemente $M \cap Z_k \in \{M_j^{(k)}\}_{j=1}^{k+1}$, da cui $M \in \{M_j^{(k+1)}\}_{j=1}^{k+2}$.
Ne segue che le condizioni 1, 2 e 3 valgono per ogni $i = 1, \ldots, k$.

Allora per induzione esiste una successione di interi algebrici $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ tali che se $F_i = \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$ e, se Z_i è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in F_i, allora 1, 2 e 3 sono valide per ogni $i \geq 1$.

Poniamo

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i.$$

Chiaramente $\mathbb{Z}^*$ è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in F. Segue dal Corollario 4.1.5 che $\mathbb{Z}^*$ è un dominio almost Dedekind: infatti, un qualsiasi ideale massimale P di $\mathbb{Z}^*$ si contrae, in $\mathbb{Z}$, su uno degli ideali massimali $(p_1), \ldots, (p_j), \ldots$ e, per ogni j e per ogni i, $p_j Z_i$ presenta una fattorizzazione in cui nessun fattore compare a una potenza maggiore di uno. Tuttavia $\mathbb{Z}^*$ non è un dominio di Dedekind, per il Teorema 2.2.6, in quanto l'elemento p_1 appartiene a un numero infinito di ideali massimali di $\mathbb{Z}^*$.

Si vuole infine provare che

$$M^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{n+1}^{(n)}$$

è l'unico ideale di $\mathbb{Z}^*$ che non sia finitamente generato.
A tale scopo, si prenda un ideale massimale M di $\mathbb{Z}^*$ diverso da M^*. Allora, poiché

$$M = M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (M \cap Z_i),$$

segue che esiste un intero i tale che $M \cap Z_i \neq M^{(i)}_{i+1}$. Inoltre, se $j > i$ si ha $M \cap Z_j \neq M^{(j)}_{j+1}$ poiché $(M \cap Z_j) \cap Z_i = M \cap Z_i \neq M^{(i)}_{i+1} = M^{(j)}_{j+1} \cap Z_i$.
Dalla scelta della successione $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ segue che esiste un intero $j > i$ tale che $M \cap Z_j$ sia inerte in Z_k per ogni $k \geq j$. Allora $M \cap Z_k = (M \cap Z_j)Z_k$ e

$$M = \bigcup_{k=j}^{\infty}(M \cap Z_k) = \bigcup_{k=j}^{\infty}(M \cap Z_j)Z_k = (M \cap Z_j)\bigcup_{k=j}^{\infty} Z_k = (M \cap Z_j)Z^*$$

Essendo Z_j un domino di Dedekind, segue che $M \cap Z_j$ ha una base di due elementi e, conseguentemente, anche M ha una base di due elementi; M è pertanto finitamente generato.
Allora M^* deve essere non finitamente generato, altrimenti Z^* risulterebbe noetheriano e pertanto un dominio di Dedekind. Risulta in tal modo dimostrato che M^* è l'unico ideale massimale che non sia finitamente generato.

Si noti che l'esempio appena analizzato non rappresenta altro che un caso particolare dell'esempio riportato in [1].
Sia, infatti, $\{P_i\}_{i=1^{\infty}}$ l'insieme di tutti gli ideali massimali di un dominio di Dedekind D con campo dei quozienti K. Arnold e Gilmer mostrano in [1] come sia possibile costruire una successione $K \subseteq K(\alpha_1) \subseteq \ldots \subseteq K(\alpha_n) \subseteq \ldots$ di estensioni algebriche semplici di K, tali che valgano le seguenti proprietà:

(1) $[K(\alpha_1) : K] = 2$ e $[K(\alpha_{i+1}) : K(\alpha_i)] = 2$, per $i = 1, 2, \ldots$;

(2) Se D_n è la chiusura integrale di D in $K(\alpha_n)$ e se $\{M^{(n)}_{r,1}, \ldots, \{M^{(n)}_{r,\lambda_r}\}$ è l'insieme degli ideali massimali di D_n che si contraggono su P_r, $1 \leq r \leq n+2$, allora $M^{(n)}_{1,1}D_{n+1} = M^{(n+1)}_{1,1}M^{(n+1)}_{1,2}$ e per ogni $M^{(n)}_{i,j} \neq M^{(n)}_{1,1}$, $M^{(n)}_{i,j}$ è inerte in D_{n+1}.

Dimostrano, inoltre, che, se D^* è la chiusura integrale di D in $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(\alpha_i)$, D^* è un dominio almost Dedekind che non è Dedekind e $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M^{(i)}_{1,1}$ è l'unico ideale di D^* che non è finitamente generato.

Esempio 2. ***(Esempio di Nakano)*** Sia $\{p_i\}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$. Denotiamo con ω_p la p-esima radice primitiva dell'unità. Siano $F_0 := \mathbb{Q}$, $F_1 := \mathbb{Q}(w_{p_1})$, $F_2 := \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2})$, $\ldots$, $F_i := \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}), \ldots$. Sia inoltre Z_i la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in F_i. Per il Teorema 1.0.7, Z_i è un dominio di Dedekind per ogni i. Poniamo

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \quad \text{e} \quad \mathbb{Z}^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i.$$

Chiaramente $\mathbb{Z}^*$ è la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in F.

In [25], Nakano sintetizza i suoi risultati nel seguente teorema.

Teorema 4.1.8. *Con la notazione appena introdotta, se p è un primo in $\mathbb{Z}$, allora $pZ_i = (P_1^{(i)} P_2^{(i)} \cdots P_{\lambda_i}^{(i)})^{e_i}$, dove $P_k^{(i)}$ è un ideale primo di Z_i per ogni $k = 1, \ldots, \lambda_i$, e l'esponente e_i resta costante per i sufficientemente grande, mentre λ_i aumenta quando i tende all'infinito. Inoltre a partire da $\mathbb{Q} = F_0$ si può estrarre una sottosuccessione $\{Z_{i_j}\}_{j=1}^{\infty}$ da $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$ tale che ognuno degli ideali primi $P_k^{(i_j)}$ $(k = 1, \ldots, \lambda_{i_j})$ nel passaggio da Z_{i_j} a $Z_{i_{j+1}}$ si decompone sempre in almeno due ideali primi distinti di $Z_{i_{j+1}}$.*

Alla luce di questo teorema, il fatto che $\mathbb{Z}^*$ sia un dominio almost Dedekind è una diretta conseguenza del Corollario 4.1.5, in quanto l'insieme $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ è limitato.
Inoltre la non noetherianità di $\mathbb{Z}^*$ si dimostra notando che, per il Teorema 4.1.8, qualche primo p appartiene a un numero infinito di ideali massimali di $\mathbb{Z}^*$.

4.2 Anelli di semigruppo

Tale costruzione risale al 1974, quando, nell'articolo "*Semigroup rings as Prüfer rings*" [15], Gilmer e Parker diedero le condizioni affinché un anello di semigruppo sia un dominio almost Dedekind [15, Teorema 4.1].

Richiamiamo che un *semigruppo* S è un insieme non vuoto dotato di un'operazione binaria associativa. Denoteremo tale operazione con $+$.
Un semigruppo S si dice *abeliano* se $s + t = t + s$ per ogni $s, t \in S$. Se ora S è abeliano, S si dice *cancellativo* se in esso vale la legge di cancellazione, ovvero, se per ogni $s \in S$, $s + a = s + b$ implica $a = b$. Inoltre S si dice *senza*

torsione se per ogni n e per ogni $x, y \in S$ l'uguaglianza $nx = ny$ implica $x = y$.
Infine definiamo il *gruppo quoziente* G di un semigruppo abeliano e cancellativo S come il più piccolo gruppo, a meno di isomorfismi, in cui S può essere immerso. Con un abuso di notazione possiamo scrivere $G = \{s - t | s, t \in S\}$.

In tale sezione $\mathbb{Q}_0$ denoterà il semigruppo additivo dei razionali non negativi e $\mathbb{Z}_0$ il semigruppo additivo degli interi non negativi.

4.2.1 Sottosemigruppi di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$

Definizione. Un semigruppo S_0 è detto *sottosemigruppo di Prufër* di $\mathbb{Q}_0$ se è della forma $S_0 = G \cap \mathbb{Q}_0$, dove G è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Z}$.

I sottosemigruppi di Prufër di $\mathbb{Q}_0$ possono essere caratterizzati nel modo seguente.

Proposizione 4.2.1. *S_0 è un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ se e solo se S_0 è generato da 0 e da una famiglia (eventualmente finita) $\{1/m_i\}_i$ di numeri razionali, dove $\{m_i\}_i$ è una famiglia di interi positivi con la proprietà che m_i divide m_{i+1} per ogni i.*

Dimostrazione. Se S_0 è generato da 0 e da una famiglia $\{1/m_i\}_i$ di numeri razionali, allora $S_0 = G \cap \mathbb{Q}_0$ dove G è il gruppo quoziente di S_0. Si osservi che G contiene $\mathbb{Z}$ in quanto S_0 lo contiene. Segue che S_0 è un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$.
Viceversa, supponiamo che $S_0 = G \cap \mathbb{Q}_0$ dove G è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ che contiene $\mathbb{Z}$ (si osservi che S_0 contiene $\mathbb{Z}$). Sia $a/b \in \mathbb{Q}$ tale che $\mathrm{MCD}(a, b) = 1$; mostriamo che $a/b \in S_0$ se e solo se $1/b \in S_0$. Chiaramente se $1/b \in S_0$ allora $a/b \in S_0$. Viceversa, per l'identità di Bezout esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = 1$; allora si ha:

$$\frac{1}{b} = \frac{ax + by}{b} = x\frac{a}{b} + y \in S_0.$$

Siano dunque $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$ tali che $1/n_i \in S_0$ per ogni i; se ne deduce che S_0 è generato dall'insieme $\mathcal{S} = \{1/n_i\}_i$. Mostriamo ora come sia possibile costruire, a partire dall'insieme $\mathcal{S}$, un insieme $\mathcal{T} = \{1/m_j\}_j$ tale

che $\mathcal{T}$ generi S_0 e m_j divida m_{j+1} per ogni j.
Sia $\mathcal{T}$ inizialmente vuoto. Per prima cosa poniamo $m_1 := n_1$ e aggiungiamo $1/m_1$ a $\mathcal{T}$. Consideriamo n_2; osserviamo che, se $\mathrm{MCD}(m_1, n_2) = d$ e se $x, y \in \mathbb{Z}$ sono tali che $xm_1 + yn_2 = d$, si ha:

$$\frac{1}{\mathrm{mcm}(m_1, n_2)} = \frac{d}{m_1 n_2} = \frac{xm_1 + yn_2}{m_1 n_2} = x\frac{1}{n_2} + y\frac{1}{m_1} \in S_0$$

e quindi, ponendo $m_2 = \mathrm{mcm}(n_1, n_2)$, si ha che esiste $h \in \mathbb{Z}$ tale che $1/n_2 = h \cdot 1/m_2$. Aggiungiamo $1/m_2$ a $\mathcal{T}$. Quindi si prosegue, ordinatamente, considerando n_3 e, seguendo lo stesso ragionamento, se $\mathrm{mcm}(m_2, n_3) \neq m_2$, si pone $m_3 = \mathrm{mcm}(m_2, n_3)$. E così via.
In questo modo si costruisce un insieme $\mathcal{T} = \{1/m_j\}_j$ tale che $\mathcal{T}$ genera S_0 e m_j divide m_{j+1} per ogni j, come volevasi dimostrare. □

Definizione. Sia S_0 un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ e sia $p_1, p_3, \ldots, p_n, \ldots$ la successione degli interi primi positivi. Poniamo $k_i = \infty$ se $1/p_i^t \in S_0$ per ogni intero positivo t, altrimenti sia k_i il più grande intero non negativo s tale che $1/p_i^s \in S_0$ (si noti che la definizione di un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ implica che $1 = 1/p_i^0$ è in S). Allora la successione $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$ è detta la *caratteristica* di S_0 e ogni k_i prende il nome di *p_i-componente* di S_0.

Si noti che se $\{0\} \cup \{1/n_i\}_i$ è un insieme di generatori di S_0, con $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ e $n_i | n_{i+1}$ per ogni i, allora la condizione che la p-componente di S_0 sia finita equivale alla condizione che p non divida n_{j+1}/n_j per un j sufficientemente grande.

4.2.2 Anelli di semigruppo almost Dedekind

A partire dal concetto di semigruppo, possiamo definire un anello di semigruppo.

Definizione. Sia R un anello e S un semigruppo additivo, commutativo e con zero. Allora l'*anello di semigruppo generato da S*, che denoteremo con $R[S]$, è definito come l'algebra simbolica

$$R[S] := R[X^s;\, s \in S] = \left\{ \sum_{s \in S} a_s X^s | a_s = 0 \text{ per quasi tutti gli indici } s \in S \right\}$$

con la somma e la moltiplicazione definite formalmente dalle relazioni

$$X^0 := 1, \qquad X^s \cdot X^t := X^{s+t}.$$

Osservazioni

1. Possiamo pensare agli anelli di semigruppo come a una generalizzazione degli anelli di polinomi; infatti ogni anello di polinomi $R[Y_1, \ldots, Y_n]$ in n indeterminate è isomorfo a un anello di semigruppo su R prendendo $S = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$, il prodotto diretto di n copie del semigruppo additivo $\mathbb{N}$, tramite l'isomorfismo $R[S] \to R[Y_1, \ldots, Y_n]$ definito come segue:
$$\sum_{\substack{\text{finite} \\ h_j \in \mathbb{N}, \forall j}} a_{(h_1,\ldots,h_n)} X^{(h_1,\ldots,h_n)} \longmapsto \sum_{\substack{\text{finite} \\ h_j \in \mathbb{N}, \forall j}} a_{(h_1,\ldots,h_n)} Y_1^{h_1} \cdots Y_n^{h_n}.$$

2. Se $S = \mathbb{Z}$ allora $R[S]$ è isomorfo a $R[Y, Y^{-1}]$ tramite l'isomorfismo $R[S] \to R[Y, Y^{-1}]$ definito come segue:
$$\sum_{\substack{\text{finite} \\ k \in \mathbb{Z}}} a_k X^k \longmapsto \sum_{\substack{\text{finite} \\ k \in \mathbb{Z}}} a_k Y^k.$$

D'ora in poi limiteremo la nostra attenzione al caso in cui R sia un dominio e S un semigruppo additivo, abeliano, cancellativo, senza torsione e con zero. Il motivo di tali assunzioni è che $R[S]$ è un dominio se e solo se R è un dominio e S un semigruppo cancellativo e privo di torsione [11, Teorema 8.1].

Dato un semigruppo e un suo sottosemigruppo è possibile introdurre su di essi delle nozioni di dipendenza integrale. Si vedrà come tali relazioni di dipendenza integrale tra semigruppi influiranno su quelle tra i corrispondenti anelli di semigruppo.

Definizione. Sia T un semigruppo e sia S un sottosemigruppo di T contenente 0. Un elemento $t \in T$ si dice *intero* su S se esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $nt \in S$.

Proposizione 4.2.2. *Sia T un semigruppo, S un sottosemigruppo di T contenente 0 e D un dominio. Allora $X^t \in D[T]$ è intero su $D[S]$ se e solo se t è intero su S.*

Dimostrazione. Se t è intero su S, allora esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $nt \in S$; ne segue che X^t è radice del polinomio $Y^n - X^{nt} \in D[S][Y]$, ovvero X^t è intero su $D[S]$.
Viceversa supponiamo che X^t sia intero su $D[S]$. Allora:

$$X^{nt} + h_{n-1}X^{(n-1)t} + \cdots + h_0 = 0, \tag{4.8}$$

dove $h_i \in D[S]$ per ogni i. Quindi, poiché 0 presenta un'unica rappresentazione nella forma $\sum_{j=1}^{n} a_j X^{t_j}$ con $a_j \in D \setminus \{0\}$ e $t_j \neq t_k$ per ogni $j \neq k$, deve annullarsi, nel primo membro della (4.8), il simbolo X^{nt}; pertanto deve esistere almeno un $i < n$ tale che $nt = s + it$ per qualche $s \in S$, da cui, per cancellazione, $(n-i)t = s$. Se ne conclude che t è intero su S. $\square$

Proposizione 4.2.3. *Sia D un dominio e sia G un gruppo senza torsione. Allora $D[G]$ è integralmente chiuso se e solo se D è integralmente chiuso*

Dimostrazione. Sia K il campo dei quozienti di D. Essendo $D[G] \cap K = D$, segue che D è integralmente chiuso in quanto intersezione di domini integralmente chiusi.
Supponiamo, viceversa, che D sia integralmente chiuso e che $y = \frac{f_1}{f_2}$, $f_1, f_2 \in D[G]$, sia un elemento del campo dei quozienti di $D[G]$ intero su $D[G]$. Allora esistono $h_0, \dots, h_{n-1} \in D[G]$ tali che:

$$y^n + h_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + h_0 = 0. \tag{4.9}$$

Sia H il sottogruppo di G generato dall'insieme $\{f_1, f_2, h_0, \dots, h_{n-1}\}$; allora y appartiene al campo dei quozienti di $D[H]$ ed è intero su $D[H]$. Poiché H è un gruppo finitamente generato e privo di torsione si ha che $H \cong \mathbb{Z}^m$ per un certo m. Quindi $D[H] \cong D[Y_1, \dots, Y_m][Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}]$, che rappresenta la localizzazione dell'anello di polinomi $D[Y_1, \dots, Y_m]$ nella parte moltiplicativa generata dall'insieme $\{Y_1, \dots, Y_m\}$. Essendo, per ipotesi, D integralmente chiuso, anche $D[Y_1, \dots, Y_m][Y_1^{-1}, \dots, Y_m^{-1}]$ è integralmente chiuso. Quindi $y \in D[H] \subseteq D[G]$ e $D[G]$ è integralmente chiuso, come volevasi dimostrare. $\square$

Ai nostri fini sarà, infine, utile richiamare i seguenti risultati.

Teorema 4.2.4. [14, Teorema 8.4] *Sia D un dominio e S un semigruppo. Allora $D[S]$ è un PID se e solo se D è un campo e S è isomorfo a $\mathbb{Z}_0$ o $\mathbb{Z}$.*

Lemma 4.2.5. *Sia F un campo e $1 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots$ una sequenza infinita di interi positivi tali che $m_i | m_{i+1}$ per ogni i e tale che la caratteristica di F non divida m_i. Allora il dominio*

$$D = \bigcup_{i=0}^{\infty} F[X^{1/m_i}, X^{-1/m_i}]$$

è almost Dedekind.

Dimostrazione. Sia $D_i = F[X^{1/m_i}, X^{-1/m_i}]$ per ogni i e sia $K_i = F(X^{1/m_i})$ il campo dei quozienti di D_i. Osservando che $D_0 = F[X, X^{-1}]$ è un anello di quozienti di $F[X]$ rispetto alla parte moltiplicativa generata da $\{X\}$, si ha che D_0 è un dominio di Dedekind; inoltre D_i è la chiusura integrale di D_0 in K_i per ogni i, per cui, applicando il Teorema 1.0.7 ($[K_i : K_0] = m_i < \infty$), si ottiene che D_i è un dominio di Dedekind per ogni i. Definiamo, quindi, per ogni ideale massimale P di D e per ogni $i \geq 0$, $P_i := P \cap D_i$ e e_i l'esponente di P_i come fattore dell'ideale $P_0 D_i$ nel dominio di Dedekind D_i. Allora, per il Teorema 4.1.5, $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$ è almost Dedekind se e solo se l'insieme $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ è limitato per ogni ideale massimale P di D. In particolare mostreremo che, nel nostro caso, ogni e_i è 1 per ogni ideale massimale P di D; ciò è equivalente a dire che per ogni i nessun ideale primo di D_0 ramifica in D_i. Cambiando la notazione, sarà sufficiente mostrare che, se la caratteristica di F non divide un intero positivo n, allora nessun ideale primo di $F[X, X^{-1}]$ ramifica in $F[X^{1/n}, X^{-1/n}]$. Essendo $F(X^{1/n})$ separabile su $F(X)$ sappiamo che gli unici ideali massimali di $F[X, X^{-1}]$ che ramificano in $F[X^{1/n}, X^{-1/n}]$ sono quelli che contengono d, il discriminante di $F(X^{1/n})$ su $F(X)$ [31, p. 303]. Ma in questo caso $d = \pm n^n X^{n-1} \neq 0$ $(q \nmid n)$ e $n^n X^{n-1}$ è invertibile in $F[X, X^{-1}]$. Segue che nessun ideale massimale di $F[X, X^{-1}]$ ramifica in $F[X^{1/n}, X^{-1/n}]$ e D è almost Dedekind, come asserito. $\square$

Giungiamo, così, al risultato centrale di questa sezione in cui vengono riportate le condizioni affinché un anello di semigruppo sia un dominio almost Dedekind.

Teorema 4.2.6. *Sia F un campo di caratteristica q e S un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ con gruppo quoziente G.*

(a) L'anello di semigruppo $F[S]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se S è isomorfo a $\mathbb{Z}_0$. In particolare $F[S]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se è un PID.

(b) $F[G]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se $q = 0$ o $q > 0$ e la q-componente della caratteristica di S è finita.

Dimostrazione.

(a) Se $S = \mathbb{Z}_0$, allora $F[S]$ è un PID, per il Teorema 4.2.4, e quindi è un dominio almost Dedekind.
Viceversa, supponiamo che $F[S]$ sia un dominio almost Dedekind. Sia $\{0\} \cup \{1/n_i\}_{i=1}^{\infty}$ un insieme di generatori di S, con $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ e $n_i | n_{i+1}$ per ogni i. Allora, a meno di isomorfismi, $F[S]$ è $\bigcup_i F[X^{1/n_i}]$; se l'insieme $\{n_i\}_i$ è illimitato, allora l'ideale massimale di $\bigcup_i F[X^{1/n_i}]$ generato da $\{X^{1/n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ è idempotente in quanto $X^{1/n_i} = (X^{1/n_{i+1}})^{n_{i+1}/n_i}$. Essendo per ipotesi $F[S]$ un dominio almost Dedekind, esso è privo di ideali massimali idempotenti per il Teorema 1.0.4. Deve quindi esistere in $\{n_i\}_i$ un elemento massimale n, da cui S è generato da $\{0\} \cup \{1/n\}$, ovvero $S = \{m/n \,|\, m \in \mathbb{Z}_0\}$. S è conseguentemente è isomorfo a $\mathbb{Z}_0$.

(b) Supponiamo per prima cosa che $F[G]$ sia un dominio almost Dedekind e che $q > 0$. Mostreremo che, se per assurdo la q-componente della caratteristica di S è infinita, allora $F[G]$ non è almost Dedekind. In tale ipotesi $\{1/q^n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq S \subseteq G$. Sia dunque H il sottogruppo di G generato dall'insieme $\{1/q^n\}_{n=0}^{\infty}$ (si noti che H è un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$). Osserviamo che, essendo un campo integralmente chiuso, per la Proposizione 4.2.3, $F[H]$ e $F[G]$ sono entrambi domini integralmente chiusi. Facciamo vedere, inoltre, che $F[G]$ è la chiusura integrale $F[H]^*$ di $F[H]$ nel campo dei quozienti di $F[G]$: chiaramente, essendo $F[G]$ integralmente chiuso, si ha $F[H]^* \subseteq F[G]$; viceversa, si osservi che ogni elemento di G è intero su H (per ogni $a/b \in G$, $b \cdot a/b = a \in \mathbb{Z} \subseteq H$), da cui, per la Proposizione 4.2.2, ogni elemento di $F[G]$ è intero su $F[H]$, ovvero $F[G] \subseteq F[H]^*$. Quindi $F[H]^* = F[G]$. Allora, per il Teorema 1.0.7, sarà sufficiente mostrare che $F[H]$ non è un dominio almost Dedekind per arrivare alla contraddizione che $F[G]$ non è un dominio almost Dedekind. Si osservi che $F[H] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F[X^{1/q^n}, X^{-1/q^n}]$ e l'ideale massimale di $F[H]$ generato da $\{1 - X^{1/q^n}\}_{n=1}^{\infty}$ è idempotente dal momento che $(1 - X^{1/q^{n+1}})^q = 1 - X^{1/q^n}$ per ogni n. Se ne conclude che $F[G]$ non è almost Dedekind se la q-componente di S è infinita.

Viceversa supponiamo che $q = 0$ o che $q > 0$ e la q-componente di S è finita. Sia $\{0\} \cup \{1/n_i\}_i$ un insieme di generatori di S con le solite ipotesi su $n_1, n_2, \ldots$. Se l'insieme $\{n_1, n_2, \ldots\}$ è limitato, allora S è isomorfo a $\mathbb{Z}_0$ e conseguentemente G è isomorfo a $\mathbb{Z}$; dal Teorema 4.2.4 segue quindi che $F[G]$ è almost Dedekind.

Possiamo pertanto limitarci al caso in cui l'insieme $\{n_1, n_2, \ldots\}$ è illimitato. Inoltre possiamo trattare contemporaneamente i casi $q = 0$ e $q > 0$ osservando che, se $q > 0$, non si perde di generalità se si assume che la q-componente di S è zero. Infatti se $q > 0$, allora, essendo la q-componente di S limitata, esiste un intero k tale che q non divida n_{i+1}/n_i per $i \geq k$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} F[G] &= \bigcup_{i=1}^{\infty} F[X^{1/n_i}, X^{-1/n_i}] = \bigcup_{i=k}^{\infty} F[X^{1/n_i}, X^{-1/n_i}] = \\ &= \bigcup_{i=k}^{\infty} F[(X^{1/n_k})^{n_k/n_i}, (X^{1/n_k})^{-n_k/n_i}] = \bigcup_{j=0}^{\infty} F[Y^{1/t_j}, Y^{-1/t_j}], \end{aligned}$$

dove $Y = X^{1/n_k}$ e $t_j = n_{k+j}/n_k$ per ogni $j \geq 0$; si noti che $t_{j+1}/t_j = n_{k+j+1}/n_{k+j}$ non è divisibile per q per ogni $j \geq 0$.

La tesi che $F[G]$ è almost Dedekind segue allora dal Lemma 4.2.5 $\square$

Corollario 4.2.7. *Sia F un campo di caratteristica q e G un sottogruppo di $\mathbb{Q}$ contenente $\mathbb{Z}$. L'anello di gruppo $F[G]$ è un dominio almost Dedekind se e solo se $q = 0$ o $q > 0$ ed esiste un intero positivo k tale che $1/q^k \notin G$.*

Dimostrazione. $G_0 = G \cap \mathbb{Q}_0$ è un sottosemigruppo di Prüfer di $\mathbb{Q}_0$ con gruppo quoziente G. In più, se p è un primo, allora la p-componente della caratteristica di G_0 è infinita se e solo se $1/p^t \in G$ per ogni intero positivo t. Ne segue che il Corollario 4.2.7 segue direttamente dal punto (b) del Teorema 4.2.6. $\square$

Si osservi che, per un dominio D e un gruppo abeliano G, l'anello di gruppo $D[G]$ è noetheriano se e solo se D è noetheriano e G è finitamente generato

[11, Teorema 7.7]. Quindi tramite questa osservazione e il Corollario 4.2.7 è possibile costruire una classe di esempi di domini almost Dedekind non noetheriani.

4.3 Ulteriori tecniche di costruzione

1. **Costruzione del gruppo di divisibilità**

   In [28], Olberding fa ricorso al seguente teorema di Jaffard-Kaplansky-Ohm per costruire interessanti esempi di SP-domini e quindi di domini almost Dedekind (si ricorda che dato un dominio D con campo dei quozienti K, se $\mathcal{U}(D)$ rappresenta il gruppo delle unità di D e K^* gli elementi non nulli di K, allora il gruppo quoziente moltiplicativo $\frac{K^*}{\mathcal{U}(D)}$ è il *gruppo di divisibilità di* D):

   Teorema 4.3.1. [10, Teorema 18.6] *Se G è un gruppo abeliano ordinato reticolato, allora esiste un dominio di Bézout il cui gruppo di divisibilità è ordinatamente isomorfo a G.*

   Questo teorema garantisce solo che il dominio così costruito è un dominio di Bézout. Olberding assicura che esso è un dominio almost Dedekind, per mezzo dei seguenti passi.

   (a) Si scelga uno spazio booleano X.

   (b) Si noti che X è isomorfo allo spazio degli ultrafiltri sull'algebra booleana $L(X)$ degli insiemi clopen di X.

   (c) Si costruisca un gruppo abeliano ordinato reticolato G tale che lo spazio dei filtri dei primi di G^+ sia omeomorfo allo spazio degli ultrafiltri di $L(X)$.

   (d) Si usi il teorema di Jaffard-Kaplansky-Ohm per costruire un dominio di Bézout che abbia G come gruppo di divisibilità.

   (e) Si mostri che la topologia spettrale dei primi non nulli di D è omeomorfa allo spazio dei filtri dei primi di G^+.

   (f) Si mostri che la proprietà booleana su X garantisce che il dominio D così ottenuto è un dominio almost Dedekind (in particolare un SP-dominio).

Il risultato principale del lavoro di Oldering è contenuto nel seguente teorema:

Teorema 4.3.2. [28, Teorema 3.2] *Sia X uno spazio booleano. Allora esiste un SP-dominio D tale che* $\mathrm{Max}(D)$ *sia omeomorfo a X. Tale dominio D è necessariamente un dominio almost Dedekind e i punti isolati di X corrispondono agli ideali massimali di D che sono finitamente generati.*

2. **Intersezioni di domini di valutazione**

   Questa è una tecnica utilizzata da Loper in *"More almost Dedekind domains and Prüfer domains of polynomials"* [19] e *"Sequence domains and integer-valued polynomials"* [21] che segue, in entrambi gli articoli, approssimativamente gli stessi passaggi.

   (a) Si scelga un insieme infinito di domini di valutazione noetheriani che abbiano lo stesso campo dei quozienti e che godano di particolari proprietà.

   (b) Si intersechino i domini di valutazione scelti per ottenere un dominio D.

   (c) Si provi che D è un dominio di Prüfer.

   (d) Si provi che D è un dominio almost Dedekind.

   Chiaramente la scelta dei DVR da intersecare non può essere arbitraria. Infatti l'anello di funzioni intere è un esempio di dominio di Prüfer che può essere espresso come intersezione di sopra-anelli di valutazione noetheriani, ma che non è un dominio almost Dedekind in quanto ha dimensione infinita.
   Per tale motivi, in [19], Loper introduce le seguenti ipotesi:

(h1) K è un campo.

(h2) $W = \{V_i | i \in I\}$ è un insieme non banale di domini di valutazione noetheriani su K.

(h3) Per ogni $i \in I$, v_i è la valutazione di K associata a V_i e M_i è l'ideale massimale di V_i.

(h4) $D = \bigcap_{i \in I} V_i$.

(h5) $f(X) \in D[X]$ è un polinomio monico di grado $n > 1$ tale che, per ogni $i \in I$ e per ogni $a \in V_i$, $f(a)$ è invertibile in V_i.

(h6) Per ogni $d \in D \setminus \{0\}$, l'insieme $\{v_i(d) | i \in I\}$ è limitato.

(h7) Esiste un elemento $t \in D$ tale che $t(V_i)_(M_i) = M_i(V_i)_{M_i}$ per ogni $i \in I$.

(h8) Esiste un insieme $U = \{u_0, u_1, \ldots, u_q\}$ di elementi di D che costituisce un insieme completo di residui per ogni V_i.

Loper dimostra inoltre che un dominio D definito da (h1), ..., (h6) è un almost Dedekind [19, Teorema 5], mentre un dominio D definito da (h1), ..., (h8) (che prende il nome di *dominio glad*) è un almost Dedekind non noetheriano con tutti i campi residui finiti [19, Corollario 10].

Nella parte restante dell'articolo, Loper fornisce esempi concreti di domini glad, con particolare interesse alle interzezioni di sopra-anelli di valutazioni di $Int(\mathbb{Z})$; egli dà infatti le condizioni affinché un sopra-anello di $Int(\mathbb{Z})$ sia un dominio almost Dedekind non noetheriano.

3. **Anelli di funzioni di Kronecker**

Un'altra costruzione che appare nella letteratura concerne l'anello di funzioni di Kronecker. In particolare, se D è un dominio almost Dedekind non noetheriano, allora $Kr(D)$, l'anello di funzioni di Kronecker di D, lo è anche lui. Tuttavia questa tecnica risulta essere un po' insoddisfacente in quanto si necessita a priori di un dominio almost Dedekind non noetheriano al fine di costruirne un altro.

Bibliografia

[1] J. T. Arnold e R. Gilmer, *Idempotent ideals and unions of nets of Prüfer domains*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I Math. **31** (1967), 131–145.

[2] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[3] H. S. Butts e R. Gilmer, *Primary ideals and prime power ideals*, Canad. J. Math. **18** (1966), 1183–1195.

[4] H. S. Butts e R. C. Phillips, *Almost multiplication rings*, Canad. J. Math. **17** (1965), 267–277.

[5] H. S. Butts e R. W. Yeagy, *Finite bases for integral closures*, J. Reine Angew. Math. **282** (1976), 114–125.

[6] J. L. Chabert, *Un anneau de Prüfer*, J. Algebra **107** (1987), no. 1, 1–16.

[7] M. Fontana, E. Houston, e T. G. Lucas, *Factoring ideals in integral domains*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 14, to appear.

[8] R. Gilmer, *Integral domains which are almost Dedekind*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 813–818.

[9] ———, *Overrings of Prüfer domains*, J. Algebra **4** (1966), 331–340.

[10] ———, *Multiplicative ideal theory*, Marcel Dekker Inc., New York, 1972, Pure and Applied Mathematics, No. 12.

[11] ———, *Commutative semigroup rings*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984.

[12] ———, *Prüfer domains and rings of integer-valued polynomials*, J. Algebra **129** (1990), no. 2, 502–517.

[13] R. Gilmer e J. Ohm, *Integral domains with quotient overrings*, Math. Ann. **153** (1964), 97–103.

[14] R. Gilmer e T. Parker, *Divisibility properties in semigroup rings*, Michigan Math. J. **21** (1974), 65–86.

[15] ———, *Semigroup rings as Prüfer rings*, Duke Math. J. **41** (1974), 219–230.

[16] W. J. Heinzer, *Some properties of integral closure*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 749–753.

[17] W. J. Heinzer e J. Ohm, *Locally noetherian commutative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **158** (1971), 273–284.

[18] W. Krull, *Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche*, Math. Z. **41** (1936), no. 1, 545–577.

[19] K. A. Loper, *More almost Dedekind domains and Prüfer domains of polynomials*, Zero-dimensional commutative rings (Knoxville, TN, 1994), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 171, Dekker, New York, 1995, pp. 287–298.

[20] ———, *Another Prüfer ring of integer-valued polynomials*, J. Algebra **187** (1997), no. 1, 1–6.

[21] ———, *Sequence domains and integer-valued polynomials*, J. Pure Appl. Algebra **119** (1997), no. 2, 185–210.

[22] ———, *A classification of all D such that* $\mathrm{Int}(D)$ *is a Prüfer domain*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 657–660.

[23] ———, *Almost Dedekind domains which are not Dedekind*, Multiplicative ideal theory in commutative algebra, Springer, New York, 2006, pp. 279–292.

[24] K. A. Loper e T. G. Lucas, *Factoring ideals in almost Dedekind domains*, J. Reine Angew. Math. **565** (2003), 61–78.

[25] N. Nakano, *Idealtheorie in einem speziellen unendlichen algebraischen Zahlkörper*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. **16** (1953), 425–439.

[26] ———, *Über idempotente Ideale in unendlichen algebraischen Zahlkörpern*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A. **17** (1953), 11–20.

[27] E. Noether, *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern*, Math. Ann. **96** (1927), no. 1, 26–61.

[28] B. Olberding, *Factorization into radical ideals*, Arithmetical properties of commutative rings and monoids, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 241, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005, pp. 363–377.

[29] H. Prüfer, *Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen*, Math. Z. **17** (1923), no. 1, 35–61.

[30] N. H. Vaughan e R. W. Yeagy, *Factoring ideals into semiprime ideals*, Canad. J. Math. **30** (1978), no. 6, 1313–1318.

[31] O. Zariski e P. Samuel, *Commutative algebra, Volume I*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey, 1958, With the cooperation of I. S. Cohen.

[32] ———, *Commutative algebra. Volume II*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey-Toronto-London-New York, 1960.

Ringraziamenti

Un primo, sincero ringraziamento va alla Prof.ssa Stefania Gabelli, relatore di questa tesi, la quale, con serietà, professionalità e pazienza, si è rivelata un'attenta guida in questo progetto, sia a livello didattico che umano. La puntualità dei suoi consigli e delle sue correzioni hanno reso possibile la buona riuscita di questo lavoro.

Desidero, inoltre, vivamente ringraziare il Dott. Carmelo Antonio Finocchiaro, persona fidata e stimata, per la sua costante disponibilità e il suo continuo aiuto, negli anni universitari e nella tesi.

Infine un grazie generale a chi, direttamente o indirettamente, ha contribuito affinché questo traguardo potesse essere raggiunto.

Ogni ringraziamento è una gioia e non un dovere.