Domini almost Dedekind

Annamaria Iezzi
ann.iezzi@stud.uniroma3.it

Università degli Studi di Roma Tre

18 Luglio 2012

Piano della presentazione

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \dots, w_{p_i}, \dots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}, \ldots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}, \ldots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}, \ldots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}, \ldots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Esempio di Nakano (1953)

- Sia $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ la successione dei primi in $\mathbb{Z}$ e ω_{p_i} la p_i-esima radice primitiva dell'unità, per ogni i.
- Si consideri il campo $K = \mathbb{Q}(w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_i}, \ldots)$, estensione algebrica infinita di $\mathbb{Q}$.
- Sia $\mathbb{Z}^*$ la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in K.

$$\Downarrow$$

$\mathbb{Z}^*$ è un dominio di Prüfer di dimensione uno.

$\mathbb{Z}^*$ NON è un dominio di Dedekind.

Definizione

Gilmer introdusse, in un articolo del 1964, la seguente definizione:

Definizione

Un dominio D è detto **almost Dedekind** se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

Un dominio almost Dedekind è:

- integralmente chiuso;
- uno-dimensionale.

Definizione

Gilmer introdusse, in un articolo del 1964, la seguente definizione:

Definizione

Un dominio D è detto **almost Dedekind** se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

Un dominio almost Dedekind è:

- integralmente chiuso;
- uno-dimensionale.

Definizione

Gilmer introdusse, in un articolo del 1964, la seguente definizione:

Definizione

Un dominio D è detto **almost Dedekind** se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

Un dominio almost Dedekind è:

- integralmente chiuso;
- uno-dimensionale.

Definizione

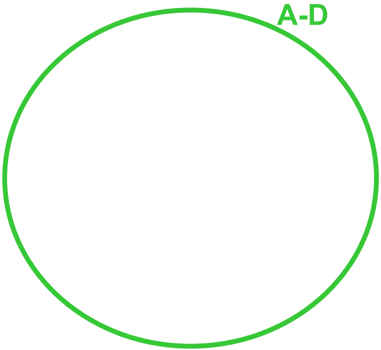
Gilmer introdusse, in un articolo del 1964, la seguente definizione:

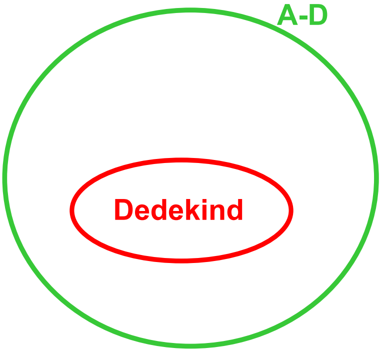
Definizione

Un dominio D è detto **almost Dedekind** se D_M è un dominio di valutazione noetheriano (DVR), per ogni ideale massimale M di D.

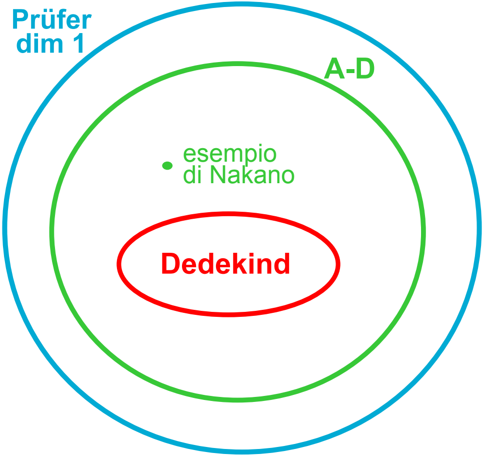
Un dominio almost Dedekind è:

- integralmente chiuso;
- uno-dimensionale.


A-D


A-D
Dedekind


A-D
esempio
di Nakano
Dedekind


Prüfer
dim 1
A-D
esempio
di Nakano
Dedekind

Teorema

Sia D un dominio. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *D è almost Dedekind.*

(ii) *Ogni ideale di D con radicale un ideale primo è una potenza del suo radicale.*

(iii) *Se I, J, H sono ideali non nulli di D tali che $IH = JH$, allora $I = J$, ovvero D soddisfa la legge di cancellazione per ideali.*

Caratterizziamo i domini almost Dedekind all'interno della classe dei domini di Prüfer:

Teorema

Sia D un dominio di Prüfer. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) *D è un dominio almost Dedekind.*

(ii) *D ha dimensione uno ed è privo di ideali massimali idempotenti.*

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n = (0)$ *per ogni ideale proprio I di D.*

Proprietà ($\sharp$) e domini di Prüfer

Per caratterizzare in modo completo i domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind introduciamo la proprietà ($\sharp$):

Definizione

Sia D un dominio. D gode della **proprietà** ($\sharp$), se per Δ_1 e Δ_2, sottoinsiemi distinti di $\mathrm{Max}(D)$, vale che

$$\bigcap_{M \in \Delta_1} D_M \neq \bigcap_{M \in \Delta_2} D_M.$$

Teorema

Sia D un dominio di Prüfer di dimensione uno. D ha la proprietà ($\sharp$) se e solo se ogni elemento non nullo e non invertibile di D appartiene a un numero finito di ideali massimali.

Proprietà ($\sharp$) e domini di Prüfer

Per caratterizzare in modo completo i domini di Dedekind all'interno della classe dei domini almost Dedekind introduciamo la proprietà ($\sharp$):

Definizione

Sia D un dominio. D gode della **proprietà** ($\sharp$), se per Δ_1 e Δ_2, sottoinsiemi distinti di $\mathrm{Max}(D)$, vale che

$$\bigcap_{M\in\Delta_1} D_M \neq \bigcap_{M\in\Delta_2} D_M.$$

Teorema

Sia D un dominio di Prüfer di dimensione uno. D ha la proprietà ($\sharp$) se e solo se ogni elemento non nullo e non invertibile di D appartiene a un numero finito di ideali massimali.

Teorema

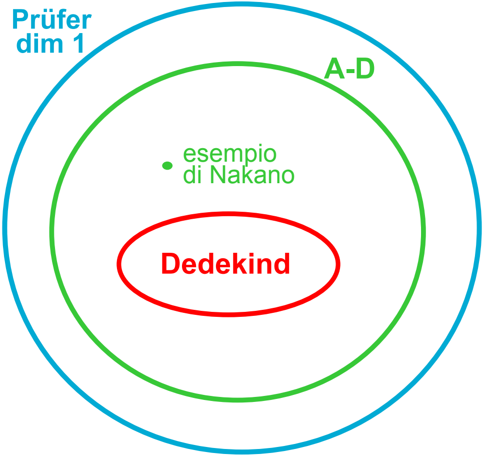
Sia D un dominio almost Dedekind. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

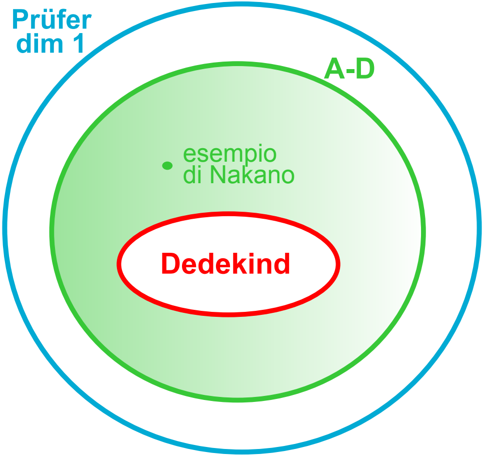
(i) *D è un dominio di Dedekind.*

(ii) *D ha la proprietà ($\sharp$).*

(iii) *Ogni elemento non nullo e non invertibile di D è contenuto in un numero finito di ideali massimali, ovvero D ha il carattere di finitezza.*

(iv) *D è noetheriano.*


Prüfer
dim 1
A-D
esempio
di Nakano
Dedekind


Prüfer
dim 1
A-D
esempio
di Nakano
Dedekind

SP-domini

Definizione

Un dominio D è un **SP-dominio** se ogni ideale è prodotto di ideali radicali.

Un dominio di Dedekind è un SP-dominio.

Teorema (Vaughan-Yeagy, 1978)

Un SP-dominio è un dominio almost Dedekind.

SP-domini

Definizione

Un dominio D è un **SP-dominio** se ogni ideale è prodotto di ideali radicali.

Un dominio di Dedekind è un SP-dominio.

Teorema (Vaughan-Yeagy, 1978)

Un SP-dominio è un dominio almost Dedekind.

SP-domini

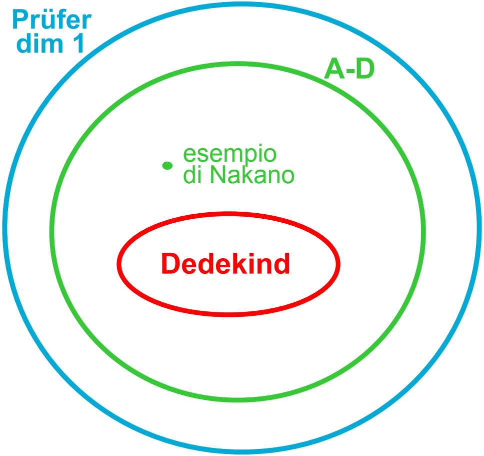
Definizione

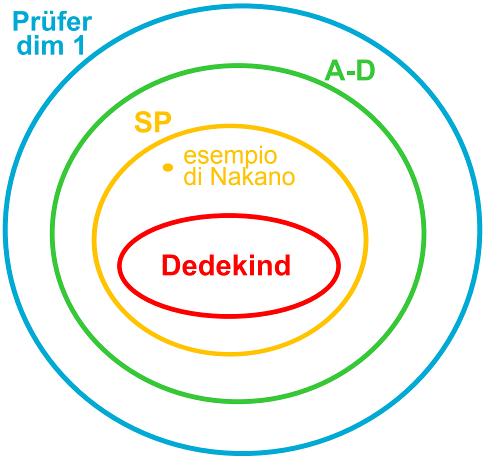
Un dominio D è un **SP-dominio** se ogni ideale è prodotto di ideali radicali.

Un dominio di Dedekind è un SP-dominio.

Teorema (Vaughan-Yeagy, 1978)

Un SP-dominio è un dominio almost Dedekind.


Prüfer
dim 1
A-D
esempio
di Nakano
Dedekind


Prüfer
dim 1
A-D
SP
esempio
di Nakano
Dedekind

Domini almost Dedekind e SP-domini

Teorema (Olberding, 2005)

Le seguenti affermazioni sono equivalenti per un dominio almost Dedekind D:

(i) *D è un SP-dominio.*

(ii) *D è privo di ideali massimali critici.*

(iii) *Se A è un ideale proprio finitamente generato di D, allora $\mathrm{rad}(A)$ è un ideale finitamente generato di D.*

(iv) *Ogni ideale principale proprio di D è prodotto di ideali radicali.*

Fattorizzazione di ideali finitamente generati

Problema

Dato un dominio almost Dedekind D con $\mathrm{Max}(D) = \{P_\alpha | \alpha \in A\}$, sotto quali ipotesi D possiede un *insieme fattorizzante*, ovvero una famiglia di ideali finitamente generati $\mathcal{J} = \{J_\alpha | \alpha \in A\}$ di D tale che $J_\alpha D_{P_\alpha} = P_\alpha D_{P_\alpha}$, per ogni α, $J_\alpha \neq J_\beta$, se $\alpha \neq \beta$, e che ogni ideale frazionario non nullo finitamente generato di D possa essere fattorizzato come prodotto finito di potenze di ideali della famiglia $\mathcal{J}$?

Fattorizzazione di ideali finitamente generati

Teorema (Loper-Lucas, 2003)

Sia D un dominio almost Dedekind tale che ogni ideale primo abbia grado sharp finito. Allora D possiede un insieme fattorizzante. In particolare, ogni dominio almost Dedekind di grado sharp finito possiede un insieme fattorizzante.

Problema aperto

Esiste un insieme fattorizzante per ogni dominio almost Dedekind?

Fattorizzazione di ideali finitamente generati

Teorema (Loper-Lucas, 2003)

Sia D un dominio almost Dedekind tale che ogni ideale primo abbia grado sharp finito. Allora D possiede un insieme fattorizzante. In particolare, ogni dominio almost Dedekind di grado sharp finito possiede un insieme fattorizzante.

Problema aperto

Esiste un insieme fattorizzante per ogni dominio almost Dedekind?

Grazie a tutti per l'attenzione!